potražićemo u obliku:

$$\Phi = Ne^{\alpha\varphi}$$

(N je konstanta normiranja). Tada je:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = N\alpha^2 e^{\alpha\varphi}$$

pa se uvrštavanjem u (9.1.36) dobija karakteristična (kvadratna) jednačina:

$$\alpha^2 + m^2 = 0; \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm i|m|, \quad \alpha = im$$

pri čemu je dozvoljeno da m ima i pozitivne i negativne vrednosti. Dakle, rešenje jednačine (9.1.36) je:

$$\Phi = Ne^{im\varphi}.$$

Kako talasna funkcija mora da bude jednoznačna (što u ovom slučaju znači da njena vrednost za uglove φ i $\varphi + 2k\pi$ mora da bude ista), mora da bude ispunjen i uslov:

$$e^{im\varphi} = e^{im(\varphi + 2\pi)} = e^{im\varphi} \cdot e^{2\pi im}$$

odakle sledi:

$$1 = i \cdot \sin 2m\pi + \cos 2m\pi; \quad \Rightarrow \quad \sin 2m\pi = 0; \quad \cos 2m\pi = 1$$

što je ispunjeno samo kada je m ceo broj. Dakle:

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Vrednost konstante normiranja N nalazimo iz uslova:

$$\int_0^{2\pi} \Phi^* \cdot \Phi d\varphi = 1; \quad \int_0^{2\pi} (Ne^{im\varphi})^* \cdot Ne^{im\varphi} d\varphi = 1$$

ili posle integraljenja:

$$N^2 \cdot 2\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Prema tome, rešenje Šredingerove jednačine (9.1.36) je kompleksna funkcija:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}. \tag{9.1.38}$$

9.1.5 Rešavanje ugaone Šredingerove jednačine (po θ)

Jednačina (9.1.37):

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+\left(f-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta = 0$$

uvođenjem smene: $x = \cos\theta$ svodi se na oblik:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{d\Theta}{dx}\right]+\left(f-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta = 0 \tag{9.1.39}$$

jer je:

$$\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\frac{d}{dx}.$$

Rešenje diferencijalne jednačine (9.1.39) tražimo u obliku:

$$\Theta = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\cdot u(x) \tag{9.1.40}$$

pri čemu funkciju $u(x)$ treba odrediti. Potražićemo $d\Theta/dx$ i zajedno sa Θ zameniti u (9.1.39). Posle sređivanja i skraćivanja sa $(1 - x^2)^{m/2}$ dobija se jednačina koju treba da zadovoljava funkcija $u(x)$:

$$(1-x^2)u'' - 2(|m|+1)\cdot x\cdot u' + (f-|m|-m^2)\cdot u = 0;\quad u'\equiv\frac{du}{dx};\quad u''\equiv\frac{d^2u}{dx^2}. \tag{9.1.41}$$

Diferencijalnu jednačinu (9.1.41) nećemo direktno rešavati nego ćemo pokazati kako se polazeći od određene funkcije, njenim diferenciranjem, dobija diferencijalna jednačina po obliku identična našoj čije rešenje tražimo. Uvodimo prvo funkciju:

$$y = (x^2-1)^l \tag{9.1.42}$$

pri čemu je l ceo, pozitivan broj. Logaritmovanjem i diferenciranjem po x dobija se iz (9.1.42):

$$(1-x^2)y' + 2lxy = 0.$$

Ako se ova jednačina $(k + 1)$ puta diferencira po x i ako se uvede oznaka:

$$z = \frac{d^k y}{dx^k} = \frac{d^k(x^2-1)^l}{dx^k} \tag{9.1.43}$$

dobija[12] se nova (diferencijalna) jednačina koja glasi:

$$(1-x^2)z'' - 2(k-l+1)xz' + (2l-k)\cdot(k+1)z = 0 \tag{9.1.44}$$

i koja je identična sa jednačinom (9.1.41), kada je:

$$u = c'z; \quad |m|+1 = k-l+1; \quad (2l-k)\cdot(k+1) = f-|m|-m^2 \tag{9.1.45}$$

gde c' može da bude neka proizvoljna konstanta. Iz (9.1.45) sledi:

$$k = l+|m| \quad \text{i} \quad f = l(l+1). \tag{9.1.46}$$

Uzimajući u obzir (9.1.45) i (9.1.46) konačno dobijamo funkciju $u(x)$:

$$u(x) = c'\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}(x^2-1)^l. \tag{9.1.47}$$

Uvrštavanjem (9.1.47) u (9.1.40) dobija se rešenje ugaone Šredingerove jednačine po θ:

$$\Theta(\theta) = c'(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\cdot\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}(x^2-1)^l; \quad x\equiv\cos\theta. \tag{9.1.48}$$

U matematici se funkcije tipa (9.1.48) nazivaju pridruženi Ležanrovi (Legendre) polinomi, pa rešenje ugaone Šredingerove jednačine može da se napiše i u obliku:

$$\Theta(\theta) = NP_l^m(x) = NP_l^m(\cos\theta) \tag{9.1.48a}$$

pri čemu su sa P_l^m označeni pridruženi Ležanrovi polinomi, dok je N konstanta normiranja u koju je uključena konstanta c'. Pridruženi Ležanrovi polinomi definišu se kao:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}}P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}(1-x^2)^{\frac{|m|}{2}}\frac{d^{l+|m|}}{dx^{l+|m|}}(x^2-1)^l$$

gde su sa $P_l(x)$ označeni Ležanrovi polinomi:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l.$$

[12] Pri tom se koristi binomni obrazac: $\frac{d^n}{dx^n}(uv) = \left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)v + n\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\right)\frac{dv}{dx} + \ldots$

Naglasimo da l može da ima samo celobrojne vrednosti i da je $|m| \leq l$ - kada bi l bilo manje od $|m|$, izraz (9.1.48) bi postao nula. Za dato l postoji $(l + 1)$ rešenja koja odgovaraju sledećim vrednostima $|m|$:

$$|m| = 0, l, 2\ldots, l. \tag{9.1.49}$$

Vrednost konstante normiranja može se odrediti iz uslova:

$$\int_0^{\pi} \Theta^* \Theta \sin\theta d\theta = 1$$

i ona iznosi:

$$N_\theta = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}}$$

pa je $\Theta(\theta)$ konačno:

$$\Theta(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^m(\cos\theta); \quad |m| \leq l. \tag{9.1.48b}$$

9.1.6 Rešavanje radijalne Šredingerove jednačine

Preuređivanjem, množenjem sa R/r^2 i uvrštavanjem $f = l(l+1)$, radijalna jednačina dobija oblik:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[A + 2\frac{B}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R = 0 \tag{9.1.50}$$

pri čemu uvodimo oznake:

$$A = \frac{2\mu E}{\hbar^2}; \quad B = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mu Z e^2}{\hbar^2}. \tag{9.1.51}$$

Odredićemo prvo rešenje asimptotskog oblika jednačine (9.1.50) i to u slučaju kada $r \to \infty$. Tada članovi koji sadrže $1/r$ i $1/r^2$ postaju jednaki nuli, pa se jednačina (9.1.50) svodi na znatno prostiju diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{d^2R}{dr^2} + AR = 0. \tag{9.1.52}$$

Rešenja diferencijalne jednačine (9.1.52) lako se nalaze i ona su oblika:

$$R(r) = C_1 e^{\sqrt{-A}r} + C_2 e^{\sqrt{-A}r} \tag{9.1.53}$$