Primeri

Primer 8.5.1 Koliki je koeficijent propustljivosti barijere širne a ako je visina barijere $U = E_0$ a energija čestice pre nailaska na barijeru je $E_0/2$. Širina barijere je: a) $a = 2\lambda$, b) $\lambda = 2a$ gde je λ De Broljijeva talasna dužina pridružena čestici energije $E_0/2$.

REŠENJE:

Upotrebićemo jednačinu (8.5.57):

$$a)\ T = \frac{4}{sh^2(k_2a)+4};\ k_2a = \frac{2\pi}{h}\sqrt{\frac{2mE_0}{2}}\cdot\frac{h}{\sqrt{\frac{2mE_0}{2}}}\cdot 2 = 4\pi;$$

$$T = \frac{4}{\left(\frac{e^{4\pi}-e^{-4\pi}}{2}\right)^2+4} = 1{,}94\cdot 10^{-10}$$

$$b)\ k_2a = \pi;\ T = \frac{4}{\left(\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2}\right)^2+4} = 0{,}0291.$$

Primer 8.5.2 Uporediti koeficijente propustljivosti deuterijuma i vodonika, energije 5 eV, koji prolaze kroz potencijalnu barijeru visine 10 eV i širine 0,01 nm.

REŠENJE:

Deuterijum ima (oko) dva puta veću masu od protona i zbog toga ima manji koeficijent propustljivosti relacije (8.5.58):

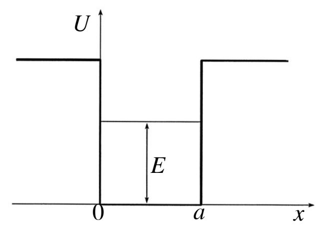
$$\frac{T_1}{T_2} = e^{-\frac{4\pi}{h}\sqrt{2m_D(U-E)}a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = e^{-\frac{4\cdot 3{,}142}{6{,}626\cdot 10^{-34}Js}\sqrt{4\cdot 1{,}673\cdot 10^{-27}kg\cdot 5\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}J}\ 0{,}01\cdot 10^{-9}m\cdot 0{,}29} = 0{,}018.$$

8.6 POTENCIJALNE JAME

8.6.1 Čestica u jednodimenzionoj jami sa beskonačno visokim zidovima

Potencijalna jama je oblast u kojoj je potencijalna energija čestice ili nula ili je predstavljamo negativnim vrednostima. Izvan jame potencijalna energija čestice je beskonačno velika. Promena potencijalne energije čestice događa se pod dejstvom neke sile u okolini tačaka x=0 i x=a (mada je promena potencijala na slici prikazana vertikalnom linijom) i ove tačke predstavljaju položaj „zidova" jame. Dakle, unutar jame, $0 \le x \le a$, oblast II, potencijalna energija čestice U jednaka je 0. Izvan jame, $-\infty < x \le 0$, i $a \le x < +\infty$, oblasti I i III, potencijalna energija je beskonačno velika, Slika 8.6.1.

Napisaćemo sada Šredingerove jednačine za oblast I, II i III:



Slika 8.6.1 Potencijalna jama sa beskonačno visokim zidovima.

$$I: \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\psi_1 = 0 \quad -\infty < x \le 0 \tag{8.6.1}$$

$$II: \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi_2 = 0 \quad 0 \le x \le a \tag{8.6.2}$$

$$III: \frac{d^2\psi_3}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-U)\psi_3 = 0 \quad a \le x < +\infty\ . \tag{8.6.3}$$

Po istom postupku kao ranije, nalazimo rešenja Šredingerovih jednačina za oblast I, II i III. Ona glase:

$$I: \psi_1(x) = A_1 e^{k_1 x} + B_1 e^{-k_1 x};\ -\infty < x \le 0 \ k_1 = \frac{\sqrt{8\pi^2 m(U-E)}}{h} \tag{8.6.4}$$

$$II: \psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x};\ 0 \le x \le a \ k_2 = \frac{\sqrt{8\pi^2 mE}}{h} \tag{8.6.5}$$

$$III: \psi_3(x) = A_3 e^{k_1 x} + B_3 e^{-k_1 x};\ a \le x < +\infty\ . \tag{8.6.6}$$

Rešenja u oblasti I i III su eksponencijalne funkcije, dok je u oblasti II funkcija kompleksna (ima oscilatorni karakter). Pokazaćemo sada da je vrednost talasne funkcije izvan potencijalne jame jednaka nuli. Konstante $A_1...B_3$, koje se javljaju u izrazima za talasne funkcije, odredićemo iz uslova da funkcija ψ mora da bude konačna i neprekidna za sve vrednosti x-koordinate. Da bi funkcija u oblasti I bila uvek konačna, mora da bude B_1=0 (inače bi za $x \to -\infty$, $\psi \to \infty$). Zbog toga treba da bude A_3=0 (inače $\psi \to \infty$ za $x \to \infty$). Dakle, levo od potencijalne jame, izraz za talasnu funkciju svodi se na:

$$\psi_1(x) = A_1 e^{k_1 x} \quad x \le 0 \tag{8.6.7}$$

a desno od jame:

$$\psi_3(x) = B_3 e^{-k_1 x} \quad x \ge a\ . \tag{8.6.8}$$

Kako je u ovim oblastima potencijalna energija beskonačno visoka, tada i $k_1 \to \infty$, pa su oba izraza (8.6.7) i (8.6.8) jednaka nuli. Prema tome, izvan jame vrednost talasne funkcije ψ jednaka je nuli, što znači da u oblastima I i III ne može da se nađe čestica.

Analizirajmo sada talasnu funkciju $\psi_2(x)$ koja je rešenje Šredingerove jednačine za oblast II. Rešenje (8.6.5) može da se napiše u trigonometrijskom obliku. Koristeći Ojlerov obrazac:

$$e^{\pm ik_2x} = \cos(k_2x) \pm i\sin(k_2x) \tag{8.6.9}$$

jednačina (8.6.5) dobija sada oblik:

$$\psi_2(x) = C_2\sin(k_2x) + D_2\cos(k_2x) \tag{8.6.10}$$

pri čemu je:

$$C_2 = i(A_2 - B_2) \ i \ D_2 = A_2 + B_2 .$$

Konstante C_2 i D_2 koje određuju oblik talasne funkcije unutar jame, odredićemo iz uslova neprekidnosti talasne funkcije na mestima promene potencijala, x=0 i x=a i iz zahteva da čestica mora da bude negde unutar jame (uslov normiranja). Pošto je izvan jame $\psi(x)$=0, sledi da talasna funkcija (8.6.10) mora da zadovoljava granične uslove $\psi_2(0)$=0 i $\psi_2(a)$=0, odnosno uslov neprekidnosti. Prvi od njih daje:

$$\psi_2(0) = D_2 = 0$$

što znači da se talasna funkcija (u jami) svodi na oblik:

$$\psi_2(x) = C_2\sin(k_2x) . \tag{8.6.11}$$

Drugi uslov neprekidnosti glasi:

$$\psi_2(a) = C_2\sin(k_2x) = 0$$

što je zadovoljeno za:

$$k_2a = n\pi \ n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8.6.12}$$

Zamenjivanjem izraza za k_2 (jednačina 8.6.5) u (8.6.12), dobija se:

$$E_n = \frac{n^2h^2}{8ma^2} . \tag{8.6.13}$$

Energiju čestice E, jednačina (8.6.5), napisali smo sada sa indeksom n, označivši sa E_n energiju koju čestica ima u stanju opisanom brojem n, dakle u kvantnom stanju n. Jednačina (8.6.13) pokazuje da čestica ne može da ima bilo koje (kontinualne) vrednosti, već samo određene, diskretne vrednosti energije. Konstantu C_2 određujemo iz uslova normiranja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_2(x)\ \psi_2^*(x)\ dx = \int_0^a |\psi_2(x)|^2\ dx = |C_2|^2 \int_0^a \sin^2(k_2x)\ dx = 1. \tag{8.6.14}$$

Ovaj integral lako se izračunava:

$$|C_2|^2\int_0^a \sin^2\ (k_2x)dx = |C_2|^2\int_0^a \frac{1-\cos(2k_2x)}{2}dx = |C_2^2|\left|\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2k_2x)\right|_0^a = |C_2^2|\frac{a}{2}.$$

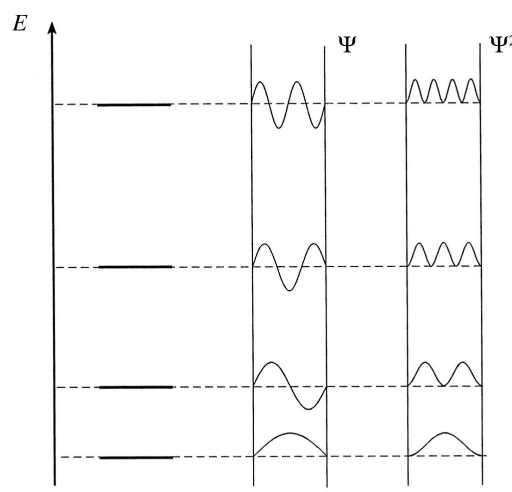
Izjednačavanjem ovog rezultata sa 1 dobija se:

$$C_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \tag{8.6.15}$$

Konačan oblik talasne funkcije, prema tome je:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right). \tag{8.6.16}$$

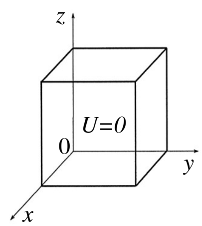
Na Slici 8.6.2 su prikazani energijski nivoi E_n i njima odgovarajuće talasne funkcije $\psi_n(x)$, kao i kvadrati ovih talasnih funkcija $\psi_n^2(x)$ koji određuju gustinu verovatnoće nalaženja čestice. Kao što se sa slike vidi, u kvantnom nivou n=1, sa najvećom verovatnoćom česticu možemo da nađeno u sredini jame, dok je verovatnoća nalaženja čestice na zidovima jednaka nuli. Ovaj rezultat razlikuje se od onog koji bi dala klasična fizika. „Klasičnu" česticu možemo, sa podjednakom verovatnoćom, da nađemo bilo gde u jami. Slika dalje pokazuje da sa porastom energije (i kvantnog broja n) maksimumi krivih leže sve bliže jedan drugom, tako da bi se pri vrlo velikom broju n dobio rezultat kao za „klasičnu" česticu. I ovo može da se smatra dokazom ispunjenosti principa korespondencije.



Slika 8.6.2 Energijski nivoi, talasne funkcije i funkcije gustine verovatnoće nalaženja čestice u potencijalnoj jami sa beskonačno visokim zidovima.

8.6.2 Čestica u trodimenzionoj jami sa beskonačno visokim zidovima

Neka se čestica nalazi u trodimenzionoj jami, Slika 8.6.3. Ponovo ćemo energiju da računamo u odnosu na dno potencijalne jame. Tada je potencijalna energija: U= 0 za $0 \le x \le a$; $0 \le y \le b$; $0 \le z \le c$; a $U = \infty$ u svim ostalim slučajevima. Izvan potencijalne jame, talasna funkcija ψ jednaka je nuli (videti 8.6.1). Unutar jame Šredingerova jednačina ima oblik:



Slika 8.6.3 Čestica u trodimenzionoj jami sa beskonačno visokim zidovima.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+\frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi = 0\,. \tag{8.6.17}$$

Rešenje jednačine potražićemo uobičajenim metodom razdvajanja promenljivih. Dakle, pretpostavićemo da funkcija ψ koja je rešenje naše jednačine (i koje zavisi od tri promenljive) može da se napiše kao proizvod tri funkcije od kojih svaka zavisi samo od jedne promenljive:

$$\psi(x,y,z) = X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)\,. \tag{8.6.18}$$

Na ovaj način pokušavamo da parcijalnu diferencijalnu jednačinu (8.6.17) rastavimo na tri obične diferencijalne jednačine. Potražimo najpre izvode funkcije (8.6.18):

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = YZ\frac{d^2X}{dx^2};\ \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = XZ\frac{d^2Y}{dy^2};\ \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = XY\frac{d^2Z}{dz^2}\,. \tag{8.6.19}$$

Uvrštavanjem funkcije ψ, jednačina (8.6.18), i njenih izvoda, jednačina (8.6.19), u jednačinu (8.6.17) dobija se:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2}Y(y)Z(z)+\frac{d^2Y(y)}{dy^2}X(x)Z(z)+\frac{d^2Z(z)}{dz^2}X(x)Y(y)+$$

$$+\frac{8\pi^2 m}{h^2}E\cdot X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z) = 0\,. \tag{8.6.20}$$

Jednačinu (8.6.20) podelićemo sa $X(x)\cdot Y(y)\cdot Z(z)$. Dobićemo:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2}+\frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2}+\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}E\,. \tag{8.6.21}$$

Prvi član u jednačini (8.6.21) zavisi samo od x, drugi od y, a treći od z, dok je njihov zbir jednak konstanti. Ovo je moguće samo u slučaju kada je i svaki od ta tri sabirka stalan. Ukupnu energiju E napisaćemo sada kao zbir tri konstante E_1, E_2 i E_3:

$$E = E_1+E_2+E_3\,. \tag{8.6.22}$$

Uz ovu smenu jednačina (8.6.21) rastavlja se na tri jednačine:

$$\frac{1}{X(x)}\frac{d^2X(x)}{dx^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}E_1;\ \frac{1}{Y(y)}\frac{d^2Y(y)}{dy^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}E_2;\frac{1}{Z(z)}\frac{d^2Z(z)}{dz^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2}E_3$$

odnosno:

$$\frac{d^2X(x)}{dx^2} + \frac{8\pi^2 mE_1}{h^2}X(x) = 0$$

$$\frac{d^2Y(y)}{dy^2} + \frac{8\pi^2 mE_2}{h^2}Y(y) = 0$$

$$\frac{d^2Z(z)}{dz^2} + \frac{8\pi^2 mE_3}{h^2}Z(z) = 0\,. \tag{8.6.23}$$

Svaka od ovih jednačina identična je Šredingerovoj jednačini za česticu u jednodimenzionoj jami sa beskonačno visokim zidovima. Funkcije *X, Y* i *Z* zadovoljavaju sledeće granične uslove: $X(a)=X(0)=0$; $Y(b)=Y(0)=0$; $Z(c)=Z(0)=0$ (uslove neprekidnosti) i uslove normiranja:

$$\int_0^a |X(x)|^2 dx = 1;\ \int_0^b |Y(y)|^2 dy = 1;\ \int_0^c |Z(z)|^2 dz = 1$$

pa su rešenja jednačina (8.6.23):

$$X(x) = \sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left(\frac{n_1\pi}{a}x\right)$$

$$Y(y) = \sqrt{\frac{2}{b}}\,\sin\left(\frac{n_2\pi}{b}y\right)$$

$$Z(z) = \sqrt{\frac{2}{c}}\,\sin\left(\frac{n_3\pi}{c}z\right). \tag{8.6.24}$$

Za enegije E_1, E_2 i E_3 dobija se:

$$E_1 = \frac{n_1^2h^2}{8ma^2};\quad E_2 = \frac{n_2^2h^2}{8mb^2};\quad E_3 = \frac{n_3^2h^2}{8mc^2}\,. \tag{8.6.25}$$

Prema tome, talasna funkcija za česticu u trodimenzionoj jami sa beskonačno visokim zidovima ima oblik:

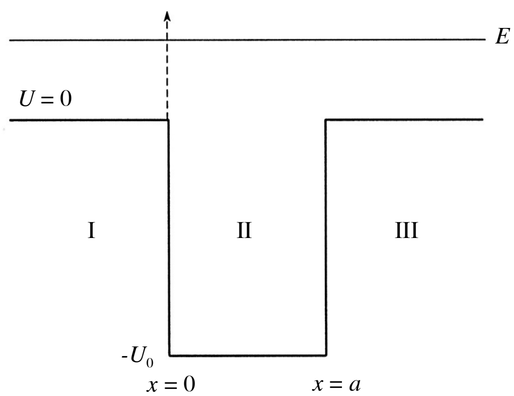
$$\psi_{n_1n_2n_3} = \sqrt{\frac{8}{abc}}\,\sin\frac{n_1\pi x}{a}\ \sin\frac{n_2\pi y}{b}\ \sin\frac{n_3\pi z}{c}\,. \tag{8.6.26}$$

Diskretne vrednosti energije koje čestica može da ima su:

$$E = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{h^2}{8m}\left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2}\right) \tag{8.6.27}$$

$$n_1, n_2, n_3 = 1, 2, 3, \ldots$$

8.6.3 Prolaz čestice kroz pravougaonu potencijalnu jamu; Ramzauerov efekt



Slika 8.6.4 Prolazak čestice kroz pravougaonu potencijalnu jamu.

Posmatraćemo sada kretanje mlaza čestica sa ukupnom energijom E (u odnosu na nultu vrednost potencijalne energije U) koji prolazi kroz oblasti I, II i III, kao na Slici 8.6.4. U oblasti I i III potencijalna energija čestice U jednaka je nuli, dok se u oblasti II potencijalna energija čestice skokovito menja od 0 od $-U_0$. Kažemo da čestica nailazi na potencijalnu, pravougaonu jamu dubine U_0 i širine a. Pretpostavićemo da mlaz čestica delimično prolazi kroz jamu, a delimično se reflektuje na ivicama jame. Da bismo odredili koeficijente transparencije, napisaćemo, kao i u prethodnim slučajevima, Šredingerove jednačine za oblasti I, II i III:

$$I:\ \frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi_1 = 0 \quad -\infty < x \le 0 \tag{8.6.28}$$

$$II:\ \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E + U_0)\psi_2 = 0 \quad 0 \le x \le a \tag{8.6.29}$$

$$III:\ \frac{d^2\psi_3}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}E\psi_3 = 0 \quad a \le x < +\infty \tag{8.6.30}$$

i na isti način kao ranije, naći ćemo rešenje Šredingerovih jednačina za oblasti I, II i III. Ona glase:

$$I:\ \psi_1(x) = A_0 e^{ik_1 x} + A e^{-ik_1 x} \quad -\infty < x \le 0,\ k_1 = \frac{\sqrt{8\pi^2 mE}}{h} \tag{8.6.31}$$

$$II:\ \psi_2(x) = B e^{ik_2 x} + C e^{-ik_2 x} \quad 0 \le x < a,\ k_2 = \frac{\sqrt{8\pi^2 m(E + U_0)}}{h} \tag{8.6.32}$$