

nosti  $U$  za  $x \geq 0$ . Slikovito rečeno, oblast II predstavlja potencijalnu barijeru (prepreku) za česticu. Kako ukupna energija mora da se održava (a ona je zbir kinetičke i potencijalne energije), sledi da u oblasti II čestica ima kinetičku energiju  $T = E - U$ . Izračunaćemo sada verovatnoću da čestica koja dolazi s leve strane ( $U = 0$ ) prođe kroz potencijalnu barijeru, odnosno da se odbije od nje i da se vrati nazad. Napisaćemo stacionarne Šredingerove jednačine za oblasti I i II:

$$\text{I: } \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}E\Psi = 0; \quad -\infty < x \leq 0 \quad (8.5.15)$$

$$\text{II: } \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\Psi = 0; \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (8.5.16)$$

Kao i u prethodnom primeru za svaku od diferencijalnih jednačina (8.5.15) i (8.5.16) dobijamo po dva rešenja. Kao rešenje uzimamo, međutim, njihovu linearnu kombinaciju koja je, saglasno svojstvu slaganja (superpozicije) koje ove diferencijalne jednačine imaju, takođe rešenje:

$$\text{I: } \Psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}; \quad -\infty < x \leq 0, \quad k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \quad (8.5.17)$$

$$\text{II: } \Psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x} + B_2 e^{-ik_2 x}; \quad 0 \leq x < \infty, \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - U)}. \quad (8.5.18)$$

U jednačinama (8.5.17) i (8.5.18)  $A_1, B_1, A_2$  i  $B_2$  su konstante a  $i$  imaginarna jedinica. Izraz:

$$A_1 e^{ik_1 x}$$

predstavlja tzv. upadni talas  $\Psi_u$  ili talas koji se kreće u pozitivnom smeru  $x$ -ose u oblasti I, pre nailaska na barijeru. Talas reflektovan barijerom  $\Psi_r$ , kreće se u negativnom smeru  $x$ -ose, pa njemu odgovara drugi član jednačine (8.5.17):

$$B_1 e^{-ik_1 x}.$$

Izraz:

$$A_2 e^{ik_2 x}$$

predstavlja talas koji se kreće u pozitivnom smeru  $x$ -ose u oblasti II i to je talas koji je prošao kroz barijeru. Talas koji bi se u oblasti II kretao zdesna nalevo prikazali bismo jednačinom:

$$B_2 e^{-ik_2 x}.$$

Ovaj talas nema fizičkog smisla i zato je konstanta  $B_2 = 0$ . Prema tome, talasna funkcija  $\Psi_2$  iz (8.5.18) postaje:

$$\Psi_2(x) = A_2 e^{ik_2 x}. \quad (8.5.19)$$

Koristeći sličnost iz optike možemo da kažemo da se upadni talas pri nailasku na granicu dveju sredina deli na reflektovani i propušteni talas. Izračunaćemo sada koeficijente propustljivosti  $T$  i refleksije  $R$ . Koeficijent propustljivosti predstavlja deo ukupnog broja čestica koji prolazi u oblast II, dok koeficijent refleksije predstavlja deo čestica koje barijera odbija unazad. Zbir koeficijenta propustljivosti i refleksije mora da bude jednak jedinici. U jednom stacionarnom stanju, struja gustine verovatnoće mora da bude stalna jednačina (8.4.35). Zato, logično, i sledi da struja gustine verovatnoće u sredini I,  $S_I$ , mora da bude jednaka struji gustine verovatnoće u sredini II,  $S_{II}$ . Izračunaćemo sada, na osnovu jednačine (8.4.35), struju gustine verovatnoće u sredini I i u sredini II.

$$S_I(x) = -\frac{i\hbar}{2m} \left( \Psi_1^* \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - \Psi_1 \frac{\partial \Psi_1^*}{\partial x} \right). \quad (8.5.20)$$

Uzimajući u obzir da je funkcija  $\Psi_1$  određena jednačinom (8.5.17), a da je njoj konjugovana funkcija:

$$\Psi_1^*(x) = A_1 e^{-ik_1 x} + B_1 e^{ik_1 x}$$

dobija se za struju gustine verovatnoće u svakoj tački  $x$  sredine, I, izraz:

$$S_I = \frac{\hbar k_1}{m} (A_1^2 - B_1^2) = v_1 A_1^2 - v_1 B_1^2. \quad (8.5.21)$$

Kako je funkcija  $\Psi_2$  data izrazom (8.5.19), a njoj konjugovana funkcija je:

$$\Psi_2^*(x) = A_2 e^{-ik_2 x}$$

struja gustine verovatnoće u svakoj tački sredine II iznosi:

$$S_{II} = \frac{\hbar k_2}{m} A_2^2 = v_2 A_2^2 \left( k_2 = \frac{mv_2}{\hbar} \right). \quad (8.5.22)$$

U stacionarnom stanju je  $S_I = S_{II}$ , pa se dobija:

$$v_1 A_1^2 - v_1 B_1^2 = v_2 A_2^2 \quad (8.5.23)$$

$v_1$  i  $v_2$  su brzine kretanja čestica u sredinama I i II. Kada jednačinu (8.5.23) podelimo proizvodom  $v_1 A_1^2$  koji označava upadnu struju gustine verovatnoće, dobijamo:

$$\frac{B_1^2}{A_1^2} + \frac{v_2 A_2^2}{v_1 A_1^2} = R + T = 1 \Rightarrow T = \frac{v_2 A_2^2}{v_1 A_1^2}; \quad R = \frac{B_1^2}{A_1^2}. \quad (8.5.24)$$

Kako i sledi iz jednačine (8.5.24) koeficijent propustljivosti zavisi od odnosa brzina čestice u dvema sredinama kroz koje se prostiru upadni i propušteni talas. Upadni i reflektovani talas prostiru se samo kroz sredinu I, pa u koeficijentu refleksije zavisnost od brzine ne postoji. Prema tome, da bismo izračunali udeo propuštenih odnosno reflektovanih čestica, treba da odredimo količnik konstanti  $B_1$  i  $A_1$  odnosno  $A_2$  i  $A_1$ . Ove konstante odredićemo iz uslova neprekidnosti talasne funkcije i njenih izvoda na granicama intervala:

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0); \quad \Psi_1'(0) = \Psi_2'(0). \quad (8.5.25)$$

Iz (8.5.17) i (8.5.19) odmah dobijamo:

$$\begin{aligned} \Psi_1(0) &= A_1 + B_1 \\ \Psi_2(0) &= A_2. \end{aligned}$$

Da bismo iskoristili drugi deo uslova (8.5.25) treba da odredimo izvode talasnih funkcija:

$$\begin{aligned} \Psi_1'(x) &= ik_1 A_1 e^{ik_1 x} - ik_1 B_1 e^{-ik_1 x} \\ \Psi_2'(x) &= ik_2 A_2 e^{ik_2 x}. \end{aligned}$$

Na granici oblasti I i II:

$$\begin{aligned} \Psi_1'(0) &= ik_1 A_1 - ik_1 B_1 \\ \Psi_2'(0) &= ik_2 A_2. \end{aligned}$$

Uslovi (8.5.25) dobijaju sada svoj posebni oblik:

$$A_1 + B_1 = A_2 \quad (8.5.26)$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = ik_2 A_2. \quad (8.5.27)$$

Eliminišući  $A_2$  iz (8.5.26) i (8.5.27), nalazimo vezu između koeficijenata  $B_1$  i  $A_1$ :

$$B_1 = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A_1.$$

Kako smo ranije istakli, odnos koeficijenata  $B_1$  i  $A_1$  dignut na kvadrat daje udeo čestica koje barijera reflektuje, što je koeficijent refleksije. Kako se vidi  $(B_1/A_1)^2$ , jednako je odnosu kvadrata modula reflektovanog i upadnog talasa:

$$\begin{aligned} R &= \frac{\Psi_r \Psi_r^*}{\Psi_u \Psi_u^*} = \frac{B_1 e^{ik_1 x} B_1 e^{-ik_1 x}}{A_1 e^{-ik_1 x} A_1 e^{ik_1 x}} = \\ &= \left(\frac{B_1}{A_1}\right)^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - U/E}}{1 + \sqrt{1 - U/E}}\right)^2. \end{aligned} \quad (8.5.28)$$

$R$  se naziva koeficijent refleksije. Koeficijent propustljivosti  $T$  koji daje udeo čestica koje prolaze kroz barijeru je:

$$T = 1 - R = 4 \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = 4 \frac{\sqrt{1 - U/E}}{(1 + \sqrt{1 - U/E})^2}. \quad (8.5.29)$$

Na osnovu jednačine (8.5.28) i (8.5.29) možemo da izračunamo udeo čestica sa energijom  $E$  koje bivaju reflektovane barijerom, odnosno čestica koje prolaze kroz barijeru energije  $U$ . Za različite vrednosti odnosa  $U/E$  izračunati su koeficijenti refleksije  $R$  i koeficijenti propustljivosti  $T$ , a ovi rezultati prikazani su u Tabeli 8.5.1.

Tabela 8.5.1. Koeficijent refleksije i propustljivosti za različite vrednosti  $E/U$ , gde je  $E$  energija čestice, a  $U$  potencijalna energija barijere.

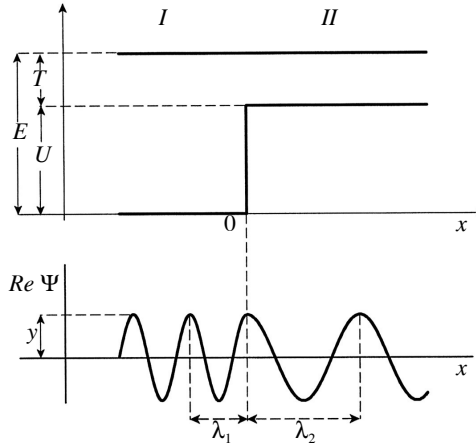
$U/E$	$R$	$T$
0,1	0,0007	0,9993
4	0,0161	0,9839
6	0,0507	0,9493
0,8	0,1459	0,8541
0,9	0,2700	0,7300
0,95	0,4026	0,5974
0,99	0,8182	0,1818

Rezultati koji slede iz (8.5.28) i (8.5.29) bitno se razlikuju od onih koje očekujemo na osnovu zakona klasične fizike. Klasična čestica koja ima energiju veću od visine barijere, sigurno bi prošla u oblast II, što označavamo sa  $T = 1$  i  $R = 0$ . Iz prethodnih jednačina, međutim, vidimo da uvek postoji određena verovatnoća da se čestica reflektuje – osim u slučaju da visina barijere  $U \rightarrow 0$  ili kada bi čestica imala beskonačno veliku energiju,  $E \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow 0$  odnosno  $T \rightarrow 1$ .

Na Slici 8.5.3 prikazan je realni deo funkcije  $\Psi(x)$  koja je dobijena kao rešenje Šredingerovih jednačina (8.5.15) i (8.5.16). Kao što se vidi, barijera ne utiče na amplitudu funkcije. Kako čestica u sredinama I i II ima različite kinetičke energije  $E$  i  $E - U$ , redom, to se i De Brojljijeve talasne dužine čestice u sredinama I i II razlikuju. Tako je:  $\lambda_I < \lambda_{II}$  jer je  $p_I > p_{II}$  pošto iz De Brojljijeve jednačine sledi da je  $\lambda_I = h/p_I = h/\sqrt{2mE}$  a  $\lambda_{II} = h/p_{II} = h/\sqrt{2m(E - U)}$ .

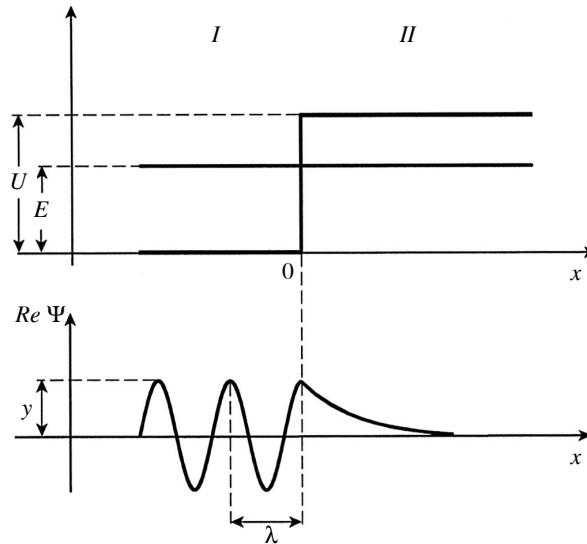
### 8.5.3 Prolaz čestice kroz potencijalnu barijeru: energija čestice $E$ manja je od potencijalne energije barijere $U$ , $E < U$

Posmatrajmo kretanje čestice (elektrona) u pozitivnom smeru  $x$ -ose, pri čemu čestica iz oblasti I nailazi u tački  $x = 0$  na oblast II, Slika 8.5.4. U oblasti I ( $x \leq 0$ ) potencijalna energija čestice jednaka je nuli, pa je energija  $E$  čestice po svom obliku kinetička. U oblasti II ( $x \geq 0$ ) potencijalna energija čestice menja se skokovito do neke stalne vrednosti  $U$ , pri čemu je sada  $U > E$ . Klasična mehanika ne predviđa mogućnost da čestica prodre u oblast II sleva nadesno. Naime, jednakost ukupnih



Slika 8.5.3 Prolaz čestice kroz potencijalnu barijeru – ukupna energija čestice  $E$  veća je od visine barijere  $U$ ,  $E > U$ . Pošto se impuls čestice smanjio usled prolaska kroz barijeru, smanjila se učestanost odnosno povećao se period talasne funkcije, pri čemu je amplituda  $y$  ostala ista.

energija čestice u oblasti I i u oblasti II mogla bi u ovom slučaju da bude zadovoljena samo kada bi bile moguće negativne vrednosti kinetičkih energija [ $E = U + (-T_{II})$ ]. Kako je ovo nemoguće, nemoguće je i da čestica proдре kroz potencijalnu barijeru. Ispitaćemo sada šta predviđa kvantna mehanika u ovom slučaju.



Slika 8.5.4 Prolaz čestice kroz potencijalnu barijeru; energija čestice  $E$  manja je od potencijalne energije barijere  $U$ . Barijera „priгуšuje” talas, pa se amplituda talasa  $y$  asimptotski približava nuli.

Napisaćemo Šredingerove jednačine koje se odnose na stanje čestice u oblasti I i II:

$$\text{I: } \frac{d^2 \psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \psi_1 = 0; \quad -\infty < x \leq 0 \quad (8.5.30)$$

$$\text{II: } \frac{d^2\psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(E - U)\psi_2 = 0; \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (8.5.31)$$

Rešenja ovih jednačina su:

$$\text{I: } \psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}; \quad -\infty < x \leq 0, \quad k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \quad (8.5.32)$$

$$\text{II: } \psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x}; \quad 0 \leq x < \infty, \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)}. \quad (8.5.33)$$

Kao i u prethodnom poglavlju sa  $\psi_u = A_1 e^{ik_1 x}$  označićemo upadni talas, a sa  $\psi_r = B_1 e^{-ik_1 x}$  reflektovani talas. Priroda rešenja u oblasti II sada je drukčija – kako je  $U > E$ , talasna funkcija za  $x > 0$  nema oscilatorni već eksponencijalni oblik. Da bi funkcija  $\psi_2$  bila konačna za sve vrednosti  $x$ -koordinate, moramo da izaberemo  $A_2 = 0$  (inače bi  $\psi_2 \rightarrow \infty$  kada  $x \rightarrow \infty$ ). Prema tome, u oblasti II talasna funkcija ima eksponencijalno opadajući oblik:

$$\psi_2(x) = B_2 e^{-k_2 x}. \quad (8.5.34)$$

Koeficijente refleksije  $R$  i propustljivosti  $T$  nalazimo kao u slučaju kad je  $U < E$ :

$$\psi_1(0) = A_1 + B_1$$

$$\psi_2(0) = B_2.$$

Izvodi funkcija  $\psi_1$  i  $\psi_2$  su:

$$\psi_1'(x) = ik_1 A_1 e^{ik_1 x} - ik_1 B_1 e^{-ik_1 x}; \quad \psi_1'(0) = ik_1 A_1 - ik_1 B_1$$

$$\psi_2'(x) = -k_2 B_2 e^{-k_2 x}; \quad \psi_2'(0) = -k_2 B_2.$$

Uslovi neprekidnosti talasne funkcije i njenih izvoda na granici oblasti I i II glase:

$$A_1 + B_1 = B_2$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = -k_2 B_2.$$

Uklanjanjem  $B_2$  iz ovih jednačina nalazimo:

$$A_1(ik_1 + k_2) = B_1(ik_1 - k_2).$$

Koeficijent refleksije odredićemo, kao i ranije, iz jednačine:

$$R = \frac{\Psi_{1r}\Psi_{1r}^*}{\Psi_{1u}\Psi_{1u}^*} = \frac{|B_1|^2}{|A_1|^2} = \frac{B_1 B_1^*}{A_1 A_1^*} = \frac{ik_1 + k_2 ik_1 - k_2}{ik_1 - k_2 ik_1 + k_2} = 1. \quad (8.5.35)$$

Koeficijent propustljivosti  $T=1 - R=0$ . Ovakav rezultat mogao je odmah da se dobije i proračunom vrednosti struje gustine verovatnoće u sredini II pomoću jednačine (8.4.35). S obzirom na oblik funkcije  $\Psi_2$ , jednačine (8.5.34), ovaj fluks mora da bude jednak nuli. Dobili smo rezultat koji se na prvi pogled uopšte ne razlikuje od klasičnog: čestica koja ima energiju  $E$  manju od visine potencijalne barijere, potpuno se reflektuje pri nailasku na barijeru. Pa ipak, postoji jedna bitna razlika. Gustina verovatnoće nalaženja čestice u oblasti II nije jednaka nuli, što znači da čestica može da se nađe i unutar oblasti koja je za nju, prema klasičnoj mehanici, nedostupna. Ako nađemo kvadrat modula funkcije  $\Psi_2$ :

$$\Psi_2 \Psi_2^* = B_2^2 e^{-2k_2 x} = B_2^2 e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)}x} \quad (8.5.36)$$

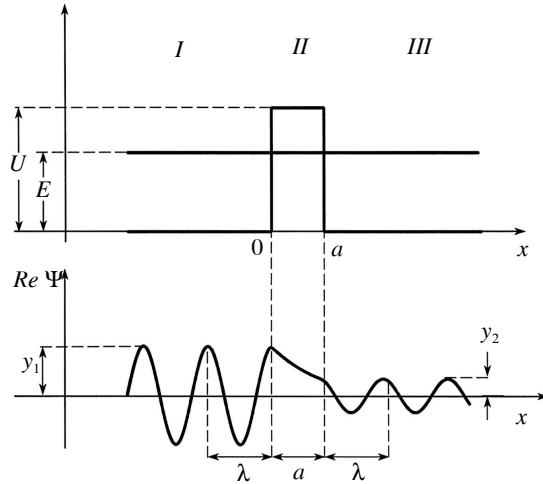
koji određuje verovatnoću nalaženja čestice na rastojanju  $x$  od granice oblasti I i II, vidimo da postoji određena, konačna verovatnoća da se čestica nađe i s desne strane barijere. Brzina opadanja funkcije gustine verovatnoće, jednačina (8.5.36) zavisi od mase čestice koja prodire kroz barijeru, kao i od razlike visine barijere i ukupne energije čestice. Obično se kao dubina prodiranja uzima rastojanje od granice oblasti I i II do tačke  $x$  na kojoj talasna funkcija  $\Psi_2$  [jednačina (8.5.34)] opadne na  $1/e$ -ti deo njene vrednosti u tački  $x = 0$ . Rezultat (8.5.36) nije u suprotnosti sa rezultatom (8.5.35) – čestica se potpuno reflektuje ( $T = 0$ ), ali ne obavezno na samoj granici oblasti I i II.

Na Slici 8.5.4 prikazan je realni deo talasne funkcije  $\psi(x)$ , koja je rešenje Šredingerove jednačine (8.5.30) i (8.5.31). U oblasti I talasna funkcija ima oscilatornu prirodu, dok u oblasti II eksponencijalno opada. Kažemo da barijera prigušuje talas.

#### 8.5.4 Prolaz čestice sa energijom $E$ kroz pravougaonu jednodimenzionu potencijalnu barijeru $U$ konačne širine $a$ , $E < U$

Neka na česticu u okolini tačke  $x = 0$  deluje polje sile koje prouzrokuje promenu potencijala od vrednosti nula do neke konstantne vrednosti  $U$ . U okolini tačke  $a$  dolazi, opet zbog dejstva sile, do promene potencijala od vrednosti  $U$  do nule. Ogranično područje konstantnog pozitivnog potencijala, oblasti II ( $0 \leq x \leq a$ ), Slika 8.5.5, naziva se potencijalna prepreka (barijera) konačne širine. U skladu sa tim, čestica koja se kreće sa energijom  $E$  u pozitivnom smeru  $x$ -ose, ima u oblastima I ( $x \leq 0$ ) i III ( $x \geq a$ ) potencijalnu energiju nula, a u oblasti II ( $0 \leq x \leq a$ ), njena potencijalna energija je  $U$  pri čemu je  $U > E$ . Šredingerove jednačine za oblast I, II i III glase:

$$\text{I: } \frac{d^2 \Psi_1}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \Psi_1 = 0; \quad -\infty < x \leq 0 \quad (8.5.37)$$



Slika 8.5.5 Prolaz čestice koja ima energiju  $E$  kroz barijeru čija su potencijalna energija  $U$  i širina  $a$ , na osnovu rešenja (8.5.40) – (8.5.42). Amplituda talasne funkcije smanjuje se unutar barijere (prigušenje talasa), ali to ne utiče na period (frekvenciju) talasne funkcije u prostoru iza barijere.

$$\text{II: } \frac{d^2 \Psi_2}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \Psi_2 = 0; \quad 0 \leq x \leq a \quad (8.5.38)$$

$$\text{III: } \frac{d^2 \Psi_3}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \Psi_3 = 0; \quad a \leq x < +\infty. \quad (8.5.39)$$

Rešenja prethodnih jednačina su:

$$\text{I: } \Psi_1(x) = A_1 e^{ik_1 x} + B_1 e^{-ik_1 x}; \quad -\infty < x \leq 0, \quad k_1 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2mE} \quad (8.5.40)$$

$$\text{II: } \Psi_2(x) = A_2 e^{k_2 x} + B_2 e^{-k_2 x}; \quad 0 \leq x \leq a, \quad k_2 = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(U - E)} \quad (8.5.41)$$

$$\text{III: } \Psi_3(x) = A_3 e^{ik_1 x}; \quad a \leq x < +\infty. \quad (8.5.42)$$

Član  $B_3 e^{-ik_1 x}$ , koji bi odgovarao kretanju čestice u oblasti III zdesna nalevo u (8.5.42) je izostavljen. Uslovi neprekidnosti funkcije i njenih izvoda na granicama intervala su:

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0); \quad \Psi_1'(0) = \Psi_2'(0)$$

$$\Psi_2(a) = \Psi_3(a); \quad \Psi_2'(a) = \Psi_3'(a).$$

Iz ovih uslova sledi:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 \quad (8.5.43)$$

$$ik_1 A_1 - ik_1 B_1 = k_2 A_2 - k_2 B_2 \quad (8.5.44)$$

$$A_2 e^{k_2 a} + B_2 e^{-k_2 a} = A_3 e^{ik_1 a} \quad (8.5.45)$$



$$k_2 A_2 e^{k_2 a} - k_2 B_2 e^{-k_2 a} = ik_1 A_3 e^{ik_1 a}. \quad (8.5.46)$$

Koeficijent propustljivosti, odnosno deo ukupnog broja čestica koji prode kroz barijeru, jednak je odnosu kvadrata amplituda funkcije  $\psi_3(x)$  i dela funkcije  $\psi_1(x)$  koji opisuje kretanje sleva nadesno. Napomenimo da otpada zavisnost koeficijenta propustljivosti od brzine čestice jer su brzine čestica u sredinama I i III jednake:

$$T = \frac{|A_3|^2}{|A_1|^2}. \quad (8.5.47)$$

Pomoću (8.5.43) – (8.5.46) izračunaćemo količnik  $A_3/A_1$ . Uvedimo sledeće smene:

$$\frac{A_3}{A_1} = w; \quad \frac{A_2}{A_1} = y; \quad \frac{B_1}{A_1} = z; \quad \frac{B_2}{A_1} = t.$$

Sada sistem jednačina (8.5.43) – (8.5.46) ima oblik:

$$1 + z = y + t \quad (8.5.48)$$

$$ik_1 - ik_1 z = k_2 y - k_2 t \quad (8.5.49)$$

$$ye^{k_2 a} + te^{-k_2 a} = we^{ik_1 a} \quad (8.5.50)$$

$$k_2 ye^{k_2 a} - k_2 te^{-k_2 a} = ik_1 we^{ik_1 a}. \quad (8.5.51)$$

Ako jednačinu (8.5.48) pomnožimo sa  $ik_1$  pa saberemo sa (8.5.49), dobijamo:

$$2ik_1 = y(k_2 + ik_1) + t(ik_1 - k_2). \quad (8.5.52)$$

Kada jednačinu (8.5.50) pomnožimo sa  $ik_1$  i oduzmemo od (8.5.51) dobija se:

$$y(k_2 - ik_1)e^{k_2 a} = t(ik_1 + k_2)e^{-k_2 a}. \quad (8.5.53)$$

Uklanjanjem nepoznate  $t$  iz jednačina (8.5.52) i (8.5.53), dobijamo  $y$ :

$$y = \frac{2ik_1 e^{-k_2 a} (ik_1 + k_2)}{e^{-k_2 a} (k_2 + ik_1)^2 - e^{k_2 a} (k_2 - ik_1)^2}. \quad (8.5.54)$$

Sada i iz jednačina (8.5.50) i (8.5.51) uklonimo  $t$  da bismo dobili  $w$  u zavisnosti od  $y$ . S tim ciljem (8.5.50) množimo sa  $k_2$  i dobijeni proizvod oduzimamo od (8.5.51):

$$w = \frac{2k_2 e^{k_2 a}}{(k_2 + ik_1) e^{ik_1 a} y}.$$

Ako sada u gornju jednačinu uvrstimo izraz za  $y$  iz (8.5.54), dobijamo:

$$w = \frac{A_3}{A_1} = \frac{4ik_1k_2e^{-ik_1a}}{e^{-k_2a}(k_2+ik_1)^2 - e^{k_2a}(k_2-ik_1)^2}.$$

Uvodeći funkcije sinus hiperbolički i kosinus hiperbolički, definisane jednačinama:

$$sh(k_2a) = \frac{e^{k_2a} - e^{-k_2a}}{2}; \quad ch(k_2a) = \frac{e^{k_2a} + e^{-k_2a}}{2}$$

možemo  $w$  da predstavimo u obliku:

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{2ik_1k_2e^{-ik_1a}}{(k_1^2 - k_2^2)sh(k_2a) + 2ik_1k_2ch(k_2a)}. \quad (8.5.55)$$

Izraz konjugovan ovome je:

$$\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^* = \frac{-2ik_1k_2e^{ik_1a}}{(k_1^2 - k_2^2)sh(k_2a) - 2ik_1k_2ch(k_2a)}. \quad (8.5.56)$$

Koeficijent propustljivosti jednak je proizvodu jednačina (8.5.55) i (8.5.56):

$$\left(\frac{A_3}{A_1}\right)\left(\frac{A_3}{A_1}\right)^* = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2 - k_2^2)^2 sh^2(k_2a) + 4k_1^2k_2^2 ch^2(k_2a)}.$$

Kako je:

$$ch^2x - sh^2x = 1$$

konačno se dobija:

$$T = \frac{4k_1^2k_2^2}{(k_1^2 + k_2^2)^2 sh^2(k_2a) + 4k_1^2k_2^2}. \quad (8.5.57)$$

Ovaj izraz je dosta složen i nepogodan za analizu. Možemo da ga znatno uprostimo ako se koristimo činjenicom da je u najvećem broju slučajeva:

$$sh(k_2a) \approx \frac{1}{2}e^{k_2a}.$$

Pokažimo ovo na jednom tipičnom primeru. Neka je čestica koju posmatramo elektron,  $E - U = 150 eV$ , dok je  $a = 10^{-10}$  m (0,1 nm). Tada je:

$$k_2a = \frac{\sqrt{8\pi^2m(U-E)}}{h}a = \frac{\sqrt{8 \cdot 8,314^2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 150 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}}{6,6 \cdot 10^{-34}} 10^{-10} = 6,28;$$

$$\operatorname{sh}(6, 28) = \frac{e^{6,28} - e^{-6,28}}{2} = 266,893; \quad \frac{e^{k_2 a}}{2} = 266,894.$$

Ako sada  $\operatorname{sh}(k_2 a)$  zamenimo sa  $e^{(k_2 a)}/2$ , dobijamo:

$$T = \frac{4k_1^2 k_2^2}{\frac{1}{4}(k_1^2 + k_2^2)^2 e^{2k_2 a} + 4k_1^2 k_2^2} = \frac{4}{\frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 e^{2k_2 a} + 4}.$$

Kako su konstante  $k_1$  i  $k_2$  istog reda veličine, a broj 4 može da se zanemari u realnim slučajevima u odnosu na  $\exp(k_2 a)$ , izraz za  $T$  može da se napiše u približnom obliku:

$$T \approx e^{-2k_2 a} = e^{-\frac{4\pi}{h} \sqrt{2m(U-E)}a}. \quad (8.5.58)$$

Prema tome, propustljivost barijere, koja ima konačnu širinu  $a$ , i u slučaju kada je energija čestice  $E$  manja od potencijalne energije  $U$ , različita je od nule i može da se u najvećem broju slučajeva izračuna iz jednačine (8.5.58). U Tabeli 8.5.2 date su vrednosti za propustljivost barijere  $T$ , pri različitim širinama barijere  $a$ , i za stalnu vrednost razlike  $U-E$ . Kao što vidimo, za barijeru širine  $1 \text{ \AA}$  propustljivost je prilično velika (10%), ali sa povećanjem širine barijere propustljivost eksponencijalno opada. Naglasimo da je prema zakonima klasične fizike, propustljivost barijere, u svim slučajevima kada je  $E - U < 0$ , jednaka nuli.

Tabela 8.5.2 Koeficijent propustljivosti barijere izračunat po formuli (8.5.58) za različite debljine barijere pri  $U-E=5 \text{ eV}$

$a$ (nm)	0.10	0.13	0.15	0.18	0.20	0.50	1.00
$T$	0,100	0,051	0,032	0,016	0,010	$1,04 \times 10^{-6}$	$1,07 \times 10^{-10}$

### 8.5.5 Prolaz čestice kroz potencijalnu barijeru: trodimenzioni slučaj sa sfernom simetrijom

Trodimenziona Šredingerova jednačina u pravouglom koordinatnom sistemu, jednačina (8.4.17) ima oblik:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + [E - U(r)] \psi = 0. \quad (8.5.59)$$

U jednačini smo naznačili da potencijalna energija  $U$  zavisi samo od koordinate  $r$ , odnosno da je ona sferno simetrična. Ovo je čest slučaj u atomskoj fizici, jer Kuloнова sila, koja je preovlađujuća u atomskoj fizici, ima sferno simetrični potencijal. Funkcija  $\psi$ , u opštem slučaju zavisi od svih koordinatnih  $x$ ,  $y$  i  $z$  ili, ako bismo prešli na sferne koordinate, zavisi od sfernih koordinata  $r$ ,  $\theta$  i  $\varphi$ . [O svemu ovome