

Универзитет у Београду
Факултет за физичку хемију

Увод у структуру материје

Бранислав Миловановић

Интерна скрипта у изради

Октобар 2023.

Скрипта са примерима и задацима вежбе из предмета „Увод у структуру материје”. Само за интерну употребу.

Copyright: -
License: -

Предговор

Драги студенти,

Текст је тренутно у припреми, а за основу је служио материјал који сам наследио од колеге који је пре мене држао вежбе. Текст је пун (неумесних) коментара које студенти могу игнорисати током читања.

Како би рукопис био унапређен за наредне генерација, замолио бих студенте да ми укажу на грешке које уоче у тексту и исте пошаљу на e-mail адресу branislavm@ffh.bg.ac.rs

Бранислав Миловановић

Садржај

1 Мерење и систем јединица	1
1.1 Секунда	3
1.2 Метар	4
1.3 Килограм	7
1.4 Ампер	8
1.5 Мол	8
1.6 Келвин	9
1.7 Кандела	9
2 Материја	11
2.1 Нуклеарни атом	12
2.1.1 Изотопи	13
2.1.2 Релативна атомска маса	14
2.1.3 Моларна маса	16
2.1.4 Дефект масе	18
2.2 Фундаменталне сile (интеракције)	23
2.3 Електромагнетно зрачење	26
3 Развој квантне теорије	43
3.1 Планков закон зрачења апсолутно црног тела (1900.)	44
3.2 Фотоелектрични ефекат - Ајнштајново тумачење (1905.)	47
3.3 Боров модел атома (1913.)	50
3.4 Комптонов ефекат (1922/23.)	58
3.5 Таласно-честични дуализам (1924.)	58
3.6 Шредингерова једначина (1925.) - Квантномеханички модел атома	60
3.6.1 Атом водоника	65
Квантни бројеви	65
Атомске орбитале	68
Облик и величина атомских орбитала	70
3.6.2 Вишелектронски атоми	74
Додатак	75
Д.1. Фундаменталне константе	75
Списак слика	76

1 | Мерење и систем јединица

Мерење је један од начина упознавања природе и представља основ научних сазнања. Хемијски облик кретања материје (преображај супстанцији променом њиховог састава и структуре) испитује се кроз мерења њених физичких карактеристика и физичких величина својствених свакој супстанци.

Физичка величина представља својство заједничко у квалитативним односима за многе супстанце, али карактеристично у квантитативном по гледу за конкретну супстанцу - другим речима нешто што имају многе супстанце али у различитој мери.

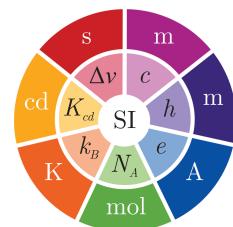
На пример густина на 20°C за KMnO_4 износи $2,7 \text{ g/cm}^3$, за H_2O износи $0,998203 \text{ g/cm}^3$, док је за злато $19,3 \text{ g/cm}^3$. С друге стране, маса неутрона износи $1,674 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ или $1,674 \cdot 10^{-21} \text{ mg}$ - она је у суштини непроменљива, разлика је само у јединицама.

Мерити физичку величину значи експерименталним путем установити колико пута у тој физичкој величини има елементарних делова које називамо **јединицама физичке величине**. Резултат мерења се изражава као број (вредност) и јединица мерења.

Поставља се питање како знамо да је „један метар“ у Србији исти као „један метар“ у Јапану? Или како можемо осигурати да је „један метар“ данас исти као пре 20 година? Због тога се користи Међународни систем јединица (франц. *Système international d'unités*, скраћено СИ), установљен 1960. године, у коме је прописано које се јединице користе при мерењу физичких величина и како су дефинисане. СИ систем покрива јединице за сваки тип мерења, али у његовој основи се налази седам јединица:

- секунда
- метар
- килограм
- ампер
- мол
- келвин
- кандела

Ових седам јединица се називају **основне јединице**, и изабране су тако да се њиховим комбиновањем могу изразити све остале мерне јединице, тзв.



Слика 1.1. Шематски приказ основних јединица и константи преко којих су дефинисане.

изведене јединице. На пример, јединица за силу - њутн (N) - се добија као килограм пута метар кроз секунд на квадрат ($\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$).

Задатак 1.1. Извести СИ јединице за магнетни флукс - вебер (Wb).

Решење:

До СИ јединица за магнетни флукс се може на више начина. Најлакше је коришћењем неких од познатих релација као и саму дефиницију магнетног флукса. Магнетни флукс је дефинисан као:

$$\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S}$$

чemu одговарају јединице:

$$\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$$

Међутим, како јединица за јачину магнетног поља (тесла - T) није основна јединица, потребно је употребити неку од познатих релација како би се и ова изведена јединица могла изразити преко основних СИ јединица. На пример, могуће је употребити израз за Лоренцову силу:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

чemu одговарају јединице:

$$\begin{aligned} \text{N} &= \text{C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{T} \\ \text{T} &= \frac{\text{s} \cdot \text{N}}{\text{C} \cdot \text{m}} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \frac{\text{kg}}{\text{A} \cdot \text{s}^2} \end{aligned}$$

па се за магнетни флукс коначно добије:

$$\text{Wb} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{A} \cdot \text{s}^2}$$

На 26. састанку Генералне конференције за тегове и мере, одржаном 2018. године, донета је значајна одлука да се у СИ систем уведу нове дефиниције основних јединица.¹ Оне су сада дефинисане преко фундаменталних константи природе, које су најпостојајије и непроменљиве референце које се могу користити. Основне јединице и фундаменталне константе преко којих су дефинисане дате су у Табели 1.1, док се шематски приказ може видети на Слици 1.1.

¹Детаље можете наћи на веб страници: <https://www.nist.gov/si-redefinition>

Табела 1.1. Основне јединице и фундаменталне константе природе уз помоћ којих су дефинисане.

Јединица	Назив константе	Вредност са јединицом
Секунда (s)	Фреквенција хиперфиног прелаза у непертурбованом атому ^{133}Cs	$\Delta\nu = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$ [1/s]
Метар (m)	Брзина светlostи у вакууму	$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$
Килограм (kg)	Планкова константа	$h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Ампер (A)	Елементарно наелектрисање	$e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Мол (mol)	Авогадрова константа	$N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$
Келвин (K)	Болцманова константа	$k_B = 1,380\,649 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$
Кандела (cd)	Светлосна јачина монокроматског зрачења фреквенције $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$	$K_{cd} = 683 \text{ lm/W}$

Поред СИ система у старијој литератури се неретко срећу и други системи јединица а од којих најчешће центиметар-грам-секунд (скраћено ЦГС, CGS или cgs) систем. Из самог назива овог система јединица је јасно да је основна јединица за дужину - центиметар, за масу - грам и за време - секунд. Ове три јединице су довољне како би се извеле све механичке јединице, док се на пример за јединице у оквиру електромагнетизма треба увести математичка веза између основних ЦГС и жељених јединица у оквиру електромагнетизма коришћењем физичких закона (на пример Кулоновог или Амперовог закона). Поред ЦГС система у употреби су некада били и стопа-фунта-секунд, метар-тона-секунд системи јединица. Такође, треба знати да се и данас у литератури учестало користе јединице ван СИ система попут: литар ($1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3$), електронволт ($1 \text{ eV} = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19} \text{ J}$), унификована јединица атомске масе/далтон ($1 \text{ u} = 1,660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$), ангстрем ($1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$) итд. Фундаменталне физичке константе су дате у [Прилогу Д.1](#).

1.1. СЕКУНДА

Дефиниција. Секунда, симбол s, је основна СИ јединица за време. Дефинисана је узимањем фиксне бројне вредности фреквенције хиперфиног прелаза у непертурбованом основном стању атoma ^{133}Cs , $\Delta\nu = 9\,192\,631\,770$ изражене у јединицама Hz = s^{-1} .

Другим речима, секунда је време потребно да се изврши тачно 9 192 631 770 прелаза између два хиперфина нивоа атoma цезијума (^{133}Cs - цезијум стандард) који се налази изолован и у стању мировања на температури од 0 K ².

Задатак 1.2. Колика је таласна дужина електромагнетног зрачења емитованог при овом прелазу?

Решење:

$$\Delta\nu = 9\,192\,631\,770 \text{ s}^{-1}$$

²Да ли се може достићи температура од 0 K?

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{9,192\,631\,770 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}} = 0,03261 \text{ m} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

1.2. МЕТАР

Дефиниција. Метар, симбол m , је основна СИ јединица дужине. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности брзине светлости у вакууму, $c = 299\,792\,458$, изражене у јединицама $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ где је секунда дефинисана преко фреквенције прелаза у атому цезијума $\Delta\nu$.

Ова дефиниција је установљена 2019. године. Раније је метар био дефинисан као растојање између две линије означене на еталону сачињеном од легуре платине-иридијума. Међутим, иако хемијски инертан, овај еталон се временом скраћивао да би након скоро сто година био краћи за 0,3 %.

Сличан принцип мерења поређењем са еталоном (штапом) краљ Едгар (староенгл. *Eadgār the Peaceable*) је искористио како би стандардизовао дужину. Наиме, он је постројио 100 војника поред зида и укупну дужину њихових десних стопала поделио на 100 једнаких делова - тако је добио стандардну дужину стопала коју је назвао *foot*, у множини *feet* (на српском језику стопа, множина стопе). Затим је направио златан штап ове дужине који је држао у трезору, и прописао закон да трговци морају да проверавају своје мере поређењем са овим штапом. Уколико је трговачка мера била краћа кажњавао их је, с друге стране уколико је мера била дужа, трговци су већ сами себе казнили мањим приходима. Уведена је и већа јединица 1 yard = 3 foot. Ове јединице се и данас користе у англосаксонском систему, и изражене у СИ систему оне износе: 1 foot = 30,45 cm и 1 yard = 91,44 cm.

Субатомске дужине

- $1,62 \cdot 10^{-35} \text{ m}$ - Планкова дужина.

Према теорији струна дужине мања од ове немају физичког смисла.
Овај број приказан у децималном запису износи:
 $0,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,0162$.

- 10^{-21} m - Де Брольева таласна дужина протона чија је енергија 45 eV.
- 10^{-18} m - горња граница величине кварткова и електрона.

Атомска скала

- 10^{-14} m - радијус језгра атома.
- $37 \cdot 10^{-12}$ m - радијус атома H.

Ако би у атому H језгро било димензије муве на центру игралишта за фудбал, тада би простор који заузима цео атом био величине целог стадиона.

- $32 \cdot 10^{-12}$ m - радијус атома He.
- $227 \cdot 10^{-12}$ m - радијус атома K.

Важно је запамтити ред величине: језгро 10^{-14} m, атоми 10^{-9} m. Ред величине 10^{-9} m значи да су радијуси атома приближно између 10^{-8} и 10^{-10} m.

- $154 \cdot 10^{-12}$ m - типична дужина C-C везе.
- $500 \cdot 10^{-12}$ m - ширина протеинског хеликса.
- $20 - 450 \cdot 10^{-9}$ m - величина вируса.
- $380 - 780 \cdot 10^{-9}$ m - таласна дужина видљиве светлости (не треба мешати са величином ствари које можемо видети голим оком у која приближно износи $\approx 10^{-4}$ m).

Људска скала

- 10^{-4} m - дебљина власи косе.
- 1,75 m - просечна висина човека. Када раширимо руке, распон је отприлике једнак нашој висини, што је понекад згодно искористити за процену дужине.

Астрономска скала

- $3,5 \cdot 10^6$ m - пречник Месеца.
- $12,8 \cdot 10^6$ m - пречник Земље.
- $1,4 \cdot 10^9$ m - пречник Сунца.
- $2,9979 \cdot 10^8$ m - светлост пређе у једној секунди (светлосна секунда).
- $1,5 \cdot 10^{11}$ m = $150 \cdot 10^6$ km - растојање од Земље до Сунца.
- 10^{13} m - пречник Сунчевог система.
- $9,46 \cdot 10^{15}$ m - светлосна година (астрономска мера за дужину, а не време!).
- $8,7 \cdot 10^{26}$ m - видљиви Свемир.

Задатак 1.3. Колико атома може да се смести на дужину од 1 cm?
Решење:

$$l_{\text{ат}} = 10^{-9} \text{ m} \quad l = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$n_{\text{ат}} = \frac{l}{l_{\text{ат}}} = \frac{10^{-2}}{10^{-9}} = 10^7 \text{ атома}$$

Задатак 1.4. Колико пута треба пресећи кликер на пола да би се дошло до једног атому?

Решење:

Претпоставимо да је кликер пречника 1 см као и да поседујемо идеално сечиво којим се ово може извести. Ако је радијус атому 10^{-9} м а кликера 1 см = 10^{-2} м онда се на следећи начин долази до неопходног броја пресецања кликера на пола (n):

$$\frac{1 \text{ см}}{2^n} = \frac{10^{-2} \text{ м}}{2^n} = 10^{-9} \text{ м} \Rightarrow n = 23, 253 \approx 23 \text{ пута}$$

Само 23 пута!?

Задатак 1.5. Да ли је Свемир празан?

Решење:

Запремина видљивог Свемира (претпоставимо да је сферног облика):

$$V_{\text{Свемир}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{8,7 \cdot 10^{26} \text{ м}}{2}\right)^3 \approx 10^{80} \text{ м}^3$$

Запремина атома:

$$V_{\text{атом}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(10^{-9} \text{ м}\right)^3 \approx 10^{-27} \text{ м}^3$$

Број атому у Свемиру: $\approx 10^{78} - 10^{82}$. Одакле овај број?

Рецимо да је приближан број галаксија $5 \cdot 10^{11}$, а број Звезда у галаксијима $4 \cdot 10^{11}$, лако добијамо да је укупан број Звезда $\approx 2 \cdot 10^{23}$. Нека је просечна маса Звезда 10^{35} г, добијамо да је укупна маса Звезда у Свемиру 10^{58} г. Наравно, уведена је оправдана претпоставка да су Звезде далеко масивније и веће од осталих објеката, који се онда могу занемарити у овом рачуну. Уз познату масу протона $\approx 10^{-24}$ г, добијамо да је број протона у Свемиру:

$$n_p = \frac{10^{58} \text{ г}}{10^{-24} \text{ г}} \approx 10^{82}$$

То је уједно и највећи број атому, јер језгра неких атома имају више протона. На крају када се број атому помножи њиховом запремином добија се да атоми заузимају укупно простор од:

$$10^{82} \cdot 10^{-27} \text{ м}^3 = 10^{55} \text{ м}^3$$

С друге стране, запремина видљивог Свемира је 10^{80} м^3 , што је 25 редова величине (десет милиона милијарди милијарди пута) веће од простора који заузимају сви атоми. Дакле, Свемир је поприлично празан! Или можда није?

Закључак: Суштина овог задатка није у одговору, већ у поступку вршења апроксимације, тј. исправном поступку вршења процене и ефикасног/брзог приближног прорачуна.

1.3. КИЛОГРАМ

Дефиниција. Килограм, симбол kg, је основна СИ јединица масе. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности Планкове константе $h = 6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ изражене у јединицама $\text{J} \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$, где су метар и секунда дефинисани преко фундаменталних константи, брзине светlostи c , и фреквенције прелаза у атому ^{133}Cs , $\Delta\nu$.

Стара дефиниција, попут дефиниције метра, укључивала је еталон: килограм је једнак маси међународног еталона масе - цилиндра од легуре платине (90 %) и иридијума (10 %) чија су висина и пречник 39 mm. Такође, и овај еталон није непроменљив, па је у последњих сто година изгубио око 50 μg .

Не мешати масу и тежину!³ Маса је мера инерцијалних и гравитационих особина тела, док је тежина сила која се јавља као узајамно дејство тела и гравитационог поља. Маса неког тела је иста на Земљи и Месецу, али је тежина истог тела приближно 6 пута мања на Месецу него на Земљи јер је убрзање силе Земљине теже приближно 6 пута веће од убрзања силе Месечеве теже, $g_z \approx 6g_m$.

Испод су приказане вредности маса неких објеката:

- $9,109\,383\,56 \cdot 10^{-31}$ kg - маса електрона (најлакша елементарна честица са ненултом масом мировања).
- 1 u = $1,660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}$ kg - атомска јединица масе.
- $3,2 \cdot 10^{-25}$ kg - маса молекула кофеина.
- 10^{-12} kg - људска ћелија.
- 10^{-6} kg - комарац.
- $7 \cdot 10^{-3}$ kg - два зрна сувог грожђа.
- $2 \cdot 10^{-1}$ kg - поморанџа.
- $2,5 - 4,5$ kg - беба, крупна беба.
- 70 kg - човек, просечне грађе.
- $1,2 \cdot 10^4$ kg - највећи слон (највећи копнени сисар).
- $1,8 \cdot 10^5$ kg - плави кит (највећа животиња која је икад живела на планети Земљи).
- $5 \cdot 10^{11}$ kg - укупна маса свих људи.
- 10^{24} kg - маса Земље.
- 10^{30} kg - маса Сунца.
- 10^{41} kg - маса Сунчевог система.
- 10^{52} kg - маса видљивог Свемира.

³За ово се добија јединица из физике у основној школи.

1.4. АМПЕР

Дефиниција. Ампер, симбол A, је основна СИ јединица за јачину електричне струје. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности елементарног наелектрисања, $e = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$, израженог у јединицама $C = A \cdot s$, где је секунда дефинисана преко фреквенције прелаза у атому ^{133}Cs , $\Delta\nu$.

Стара дефиниција је била: један ампер је стална електрична струја која би, када би се одржавала у два права паралелна проводника, бесконачне дужине и занемарљиво малог попречног пресека, који се налазе у вакууму на међусобном растојању од једног метра, проузроковала међу тим проводницима силу једнаку $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ по метру дужине.

Испод су приказане вредности јачине струје и њихов утицај на наше тело:

- 0,001 A - можемо осетити.
- 0,005 A - изазива бол.
- 0,010 A - изазива контракцију мишића.
- 0,015 A - изазива губитак контроле над телом.
- 0,070 A - изазива озбиљна оштећења тела.

1.5. МОЛ

Дефиниција. Мол, симбол mol, је основна СИ јединица за количину супстанце. Један мол садржи тачно $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ елементарних јединки. Овај број је фиксна бројна вредност Авогадрове константе, N_A , изражене у јединицама mol^{-1} и назива се Авогадров број.

Стара дефиниција је била: мол је количина супстанце која садржи онолико честица колико има атома у $1/12$ g угљениковог изотопа ^{12}C (погледати поглавље 2.1.2.).

Задатак 1.6. Колико молекула, електрона и атома садржи 1 mol H_2 ?

Решење: $6,022 \cdot 10^{23}$ молекула, $12,044 \cdot 10^{23}$ електрона и атома.

Задатак 1.7. Колика је маса једног мола лубеница?

Решење:

Ако се узме да просечна лубеница има 5 kg, један мол лубеница има:
 $m = 5 \text{ kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 3,011 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Задатак 1.8. Колика је маса и наелектрисање једног мола електрона?

Решење:

$$m = 9,102 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 5,486 \cdot 10^{-7} \text{ kg}$$

$$q = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 9,649 \cdot 10^4 \text{ C}$$

Задатак 1.9. Колика је енергија једног мола фотона фреквенције $\nu = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$?

Решење:

$$E = h\nu N_A = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \cdot 5 \cdot 10^{14} \text{ 1/s} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 1,995 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Задатак 1.10. Колико електрона има у 0,5 L воде?

Решење:

$$0,5 \text{ L} = 0,5 \text{ kg воде.}$$

$$1 \text{ mol} : 18 \text{ g} = x \text{ mol} : 500 \text{ g} \Rightarrow x = 27,78 \text{ mol воде.}$$

$$n_e = 27,78 \text{ mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \cdot 10 \text{ e}^- = 1,67 \cdot 10^{26} \text{ e}^-$$

Задатак 1.11. Колико молова свески има у амфитеатру?

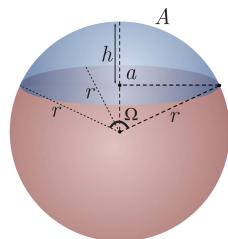
Решење:

Оптимистична процена је да у амфитеатру има 50 студената који слушају вежбе из предмета „Увод у структуру материје“ и да је бар половина понела свеску да нешто запише (или само да жврка како би убили време) онда у амфитеатру има:

$$\frac{25}{6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}} \approx 4 \cdot 10^{-23} \text{ mol свезака}$$

1.6. КЕЛВИН

Дефиниција. Келвин, симбол K, је основна СИ јединица за термодинамичку температуру. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности Болцманове константе, $k_B = 1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ изражене у јединицама $\text{J}\cdot\text{K}^{-1} = \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$, где су килограм, метар и секунда дефинисани преко константи h , c и $\Delta\nu$.



1.7. КАНДЕЛА

Дефиниција. Кандела, симбол cd, је основна СИ јединица за јачину светlostи. Дефинисана је узимањем фиксне бројне вредности светлосне јачине монокроматског зрачења фреквенције $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$ ⁴, $K_{cd} = 683$ изражене у јединицама $\text{lm}\cdot\text{W}^{-1} = \text{cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{W}^{-1}$ или $\text{cd}\cdot\text{sr}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^3$, где су килограм, метар и секунда дефинисани преко h , c и $\Delta\nu$.

sr је стерадијан (просорни угао), изведена јединица у СИ систему и који је дефинисан као просторни угао код центра кугле полупречника r затво-

Слика 1.2. Дефиниција просторног угла Ω и калоте. Површина осенчена плавом бојом се назива калота.

⁴Зашто се за дефиницију користи монокроматско зрачење које има фреквенцију тачно $540 \cdot 10^{12} \text{ Hz}$?

рен делом површине кугле (калотом) са површином $A = r^2$ (погледати Слику 1.2):

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \text{ sr} \quad (1.1)$$

где се површина калоте може израчунати на више начина:

$$A = 2\pi rh = \pi(a^2 + h^2) \quad (1.2)$$

2 | Материја

Материја је изграђена од комбинација једноставних облика материје који се називају **хемијским елементима**. **Елемент** је у том смислу **супстанција** која је сачињена од само једне врсте **атома**.

Сматра се да је појам атома увео старогрчки филозоф Леукип из Елеје (грч. Λεύκιππος, живео око 450 п. н. е.) да би његов ученик Демокрит из Абадере (грч. Δημόκρις живео око 460. п. н. е. - око 370. п. н. е.) наставио да ради на тој идеји. Њих двојица се сматрају првим атомистичарима и да су први који су у античкој филозофији изградили материјалистично-монистички систем. Модернију верзију атома је предложио Џон Далтон (енгл. John Dalton FRS, 1766 - 1844) 1807. године уз експерименталну подпору, а са главним закључцима који су произтекли из његове атомистичке теорије¹:

- Елементи су сачињени од веома малих честица које се називају атомима.
- Атоми датог елемента су идентични у смислу величине, масе и других својстава.
- Атоми не могу бити подељени на мање делове, створени или уништени.²
- Атоми различитих елемената се комбинују и целобројним односима градећи хемијска једињења.
- У хемијским реакцијама, атоми се прерасподељују између хемијских једињења стварајући нова хемијска једињења.

Сваки елемент има јединствен назив и хемијски симбол. Имена елемената су изведена на најразличитије начине, на пример по имену научника [Rf - Rutherfordium, по Ернесту Радерфорду (енгл. Ernest Rutherford, 1st Baron Rutherford of Nelson, OM, FRS, HonFRSE, 1871 - 1937)], државе (Ро - Polonium, по Польској) или географским одредницама [Cu - Copper (лат. Cuprum), бакар, изведен из назива оства Кипар].

¹Далтонова књига „A New System of Chemical Philosophy” у којој је приказан његој атомистички рад се у оригиналној форми може пронаћи на веб страници: <https://library.si.edu/digital-library/book/newsystemofchemistry12dalt>

²Данас зnamо да ово није сасвим тачно јер осим хемијских постоје и нуклеарне реакције.

2.1. НУКЛЕАРНИ АТОМ

Прва експериментална индикација да атом није кугла која не поседује унутрашњу структуру је потекла од енглеског научника Томпсона (енгл. Sir Joseph John Thomson OM PRS, 1856 - 1940) који је 1906. године награђен Нобеловом наградом за физику за откриће субатомске *честице* - електрона.³

Основне карактеристике савременог модела атoma су:

- Атоми су сачињени од **субатомских честица**⁴ које се називају **електрони, протони и неутрони**.
- Протони и неутрони формирају компатни ентитет ($\approx 10^{-14}$ m) у средишњем делу атoma који се назива атомско језгро (лат. nucleus) и које се карактерише великом густином наелектрисања.
- Електрони су дистрибуисани („размазани“) у простору око језгра слично облаку чије су димензије $\approx 10^{-9}$ m.

Атом је у целини електронеутралан, односно позитивно наелектрисање језгра је егзактно поништено негативним наелектрисањем електрона који га окружују. Основне карактеристике поменутих субатомских честица се налазе у Табели 2.1.

Табела 2.1. Особине неких субатомских честица.

Честица	Симбол	Налектрисање [$e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C]	Маса [kg]
Електрон	e^-	-1	$9,109 \cdot 10^{-31} = 5,486 \cdot 10^{-4}$ u
Протон	p^+	+1	$1,673 \cdot 10^{-27} = 1,007\,29$ u
Неутрон	n^0	0	$1,675 \cdot 10^{-27} = 1,008\,61$ u

О величини језгра и самог атoma се знало нешто више 1908. године када је Радерфорд уз помоћ Гајгера (нем. Johannes Wilhelm Geiger, 1882 - 1945)) и Марсдена (енгл. Sir Ernest Marsden CMG CBE MC FRS, 1889 - 1970) извео закључке из једноставног (и генијалног) експеримента у коме се алфа (α) честицама бомбардује свега неколико атомских слојева танка златна фолија.⁵ Овај експеримент је показао да α честице (јегра атoma) хелијума

³Интересантно је да је и његов син Џорџ Томпсон (енгл. Sir George Paget Thomson, FRS, 1892 - 1975) такође добио Нобелову награду за физику 1937. године за то што је показао, супротно открићу свог оца, да електрони испољавају и својства *тласка*. О овоме више на предмету „Атомистика“.

⁴Субатомске честице су све честице мање од атoma, без обзира на њихову сложеност, док појам **елементарне честице** обухвата честице које се не могу изделити на мање сложене компоненте. Елементарне честице су описане још увек некомплетном теоријом под називом Стандардни модел који је плод комбинације квантне теорије поља, квантне механике и теорије релативности. Укратко, Стандардни модел описује честице које се могу груписати у кваркове, лептоне и бозоне. Више о Стандардном моделу на предмету „Радиохемија и нуклеарна хемија“.

⁵Како су знали како истање фолију да буде довољно танка, када нису знали којих димензија је атом?

${}^4\text{He}^{2+}$ које потичу из радиоактивног извора) лако пролазе кроз фолију и том приликом њихов сноп не скреће значајно. Ипак, одређени део α честица скреће или се одбија натраг ка извору што је Радефорда навело на то да је сва маса, као и свој позитивно наелектрисање атома злата сконцентрисано у малом језгру а чији је радијус процењен на $\approx 10^{-14}$ м. Радијус читавог атома је реда величине $\approx 10^{-9}$ м што указује на то да су атоми поприлично „шупљи” те да α честице лако могу да прођу кроз неколико атома танку златну фолију. Овај експеримент је претходни Томпсонов модел потпуно обесмислио с обзиром да су Томпсон и део научне заједнице тог времена сматрали да су негативно наелектрисани електрони дисперговани у облаку позитивног наелектрисања, попут некаквог раствора.

Како би се језгра хемијских елемената, а самим тим и сами хемијски елементи разликовали, потребно је одредити им број протона у атомском језгрлу. Самим тим ће бити познат и број електрона у електронеутралном хемијском елементу. Овај број се назива **атомски број** елемента и означава се са **Z** (ознака потиче од немачке речи за број, *zahl*). Атомски број се назначава у супскрипту са леве стране хемијског симбола (${}_z\text{X}$). Ипак, сваки елемент има свој јединствен симбол који аутоматски кореспондира јединственом атомском броју тог елемента, па се стога и често изоставља приликом писања симбола хемијског елемента. Атомски број директно утиче на хемијске особине елемената с обзиром да показује и број електрона у електронеутралном атому. До 2022. године елемент са највећим редним бројем је ${}_{118}\text{Og}$ - Oganesson добијен у „егзотичној” нуклеарној реакцији и са временом живота од око 0,66 ms.

2.1.1. Изотопи

Атомски број показује број протона у језгру неког елемента. Ипак, у језгру се поред протона налазе и неutronи, субатомске честице неутралне у смислу наелектрисања. Протони и неutronи се заједно називају нуклеонима. Присуство неutronа несумњиво доводи до повећања масе језгра, с обзиром да су релативно сличних мача, али не и до (значајнијих) промена хемијских особина елемената.⁶ Стога се, поред атомског броја, уводи и **масени број** елемента и означава се са **A** (ознака потиче од немачке речи *atomgewicht*, што значи атомска тежина). Масени број се назначава у супскрипту са леве стране хемијског симбола (${}_z^A\text{X}$). Сада се недвосмислено може одредити број неutronа у језгру неког елемента (**N**). У природи се међутим могу наћи елементи који имају исти атомски број (исти елементи) а различити масени број. Овакви атоми се називају **изотопима**. На пример, водоник има два стабилна изотопа и један радиоактиван изотоп који се налазе у природи. То су: ${}^1\text{H}$, ${}^2\text{H}$ и ${}^3\text{H}$, који се још обележавају и

⁶Један или два неutronа мањка или вишака се неће скоро уопште одразити на хемијске особине тежих елемената (на пример Pb или U). То није случај код лаких елемената попут H, с обзиром да додатак једног или два неutronа повећава масу двоструко или троструко. Ово може имати последице на разне особине хемијских једињења у којима се ови изотопи налазе. Овакво изазвани ефекти се називају изотопским ефектима. Уколико изотопски ефекти доводе до промене тока или брзине хемијске реакције, онда се специфично називају кинетички изотопски ефекти.

као: H, D и T и називају се водоник (протијум), деутеријум и тритијум, респективно. Присутност прва два стабилна изотопа у природи је 99,972 % и 0,028 % док се трећи налази у траговима. Налелектрисана језгра ових изотопа, ${}^1\text{H}^+$, ${}^2\text{H}^+$ и ${}^3\text{H}^+$, се у литератури називају протон (p), деутерон (d) и тритон (t).

Задатак 2.1. Симбол неког елемента је ${}^{53}_{24}\text{X}^{2+}$.

- 1) Како се зове тај елемент?
- 2) Колико протона се налази у његовом језгру?
- 3) Колико неутрона се налази у његовом језгру?
- 4) Колико електрона садржи електронски омотач?

Решење:

- 1) Cr - хром
- 2) ${}^{24}p^+$
- 3) ${}^{29}n^0$
- 4) ${}^{22}e^-$

Задатак 2.2. Језгро неког атома садржи 16 неутрона, а његов електронски омотач садржи 15 електрона. Како се назива елемент чији је изотоп дати атом? Написати његов симбол и назначити атомски и масени број.

Решење:

${}^{31}_{15}\text{P}$ - изотоп фосфора

2.1.2. РЕЛАТИВНА АТОМСКА МАСА

С обзиром да сваки елемент у природи има одређени изотопски састав, практично је потребно знати средњу масу атома датог елемента, тј. усредњену на природан изотопски састав. **Релативна атомска маса** (ознака A_r и без јединица) је средња маса атома елемента који има природни изотопски састав, у односу на 1/12 масе атома ${}^12_6\text{C}$.⁷ Алтернативно, релативна атомска маса се може дефинисати као број који показује колико пута атом неког елемента садржана у 1/12 масе атома ${}^12_6\text{C}$.⁸ Маса елемента или атома се добија множењем релативне атомске масе са **унифицикованим атомском масом** или **далтоном** (ознака m_u са јединицама **u** или **Da**), односно величином која је дефинисана као 1/12 масе неутралног атома ${}^12_6\text{C}$ који није хемијски везан и који се налази у основном нуклеарном и електронском стању као и у стању мировања. У СИ систему: 1 u = 1 Da = 1, 660 539 066 60 · 10^{-27} kg Треба имати на уму да се на Земљи

⁷IUPAC је прописао релативне атомске масе за све познате елементе и могу се наћи на веб страницама: <https://iupac.qmul.ac.uk/AtWt/> и <https://www.ciaaw.org/>. Студентима, међутим, ово често није потребно с обзиром да ће (намерно или случајно) заокружити релативне атомске масе на цео број или у најбољем случају на полуброј. Обратити пажњу да неки хемијски елементи имају целобројну релативну атомску масу. Због чега је то тако?

⁸Зашто је за потребе дефинисања релативне атомске масе изабран баш атом ${}^12_6\text{C}$?

мљи локално могу пронаћи различити изотопски састави. Тако на пример сребро добијено из руде у Мексику нема исту релативну атомску масу као исти елемент добијен из руде у Кини.

Задатак 2.3. Колика је релативна атомска маса елемента угљеника, а колика изотопа $^{12}_6\text{C}$. Природни изотопски састав угљеника је: $^{12}_6\text{C}$ 98,9 % и $^{13}_6\text{C}$ 1,1 %.

Решење:

За елемент угљеник:

$$A_r(\text{C}) = \frac{98,9 \cdot 12 + 1,1 \cdot 13}{100} = 12,011$$

За изотоп $^{12}_6\text{C}$:

$$A_r(^{12}\text{C}) = 12,000$$

Задатак 2.4. Природни магнезијум се састоји од три изотопа: ^{24}Mg , ^{25}Mg и ^{26}Mg . Израчунати просечну релативну атомску масу природног магнезијума (елемента Mg) ако је природни садржај поменутих изотопа: 78,6 %, 10,1 % и 11,3 %, редом.

Решење:

Слично као и претходни задатак:

$$A_r(\text{Mg}) = \frac{78,6 \cdot 24 + 10,1 \cdot 25 + 11,3 \cdot 26}{100} = 24,33$$

Задатак 2.5. Израчунати релативну атомску масу елемента хрома ако је његов природан изотопски састав:

4,345 %	$^{50}_{24}\text{Cr}$
82,79 %	$^{52}_{24}\text{Cr}$
9,501 %	$^{53}_{24}\text{Cr}$
2,365 %	$^{54}_{24}\text{Cr}$

Решење: $A_r(\text{Cr}) = 51,5359$

Треба напоменути и да већи атомски број не мора нужно да значи већу релативну атомску масу. На пример $A_r(^{52}\text{Te}) > A_r(^{53}\text{I})$ што је последица природног изотопског састава ова два елемента:

$$\begin{array}{ll} 18,84 \% & ^{126}_{52}\text{Te} \\ 31,74 \% & ^{128}_{52}\text{Te} \\ 34,08 \% & ^{130}_{52}\text{Te} \end{array} \quad \begin{array}{l} 100 \% \\ A_r(^{52}\text{Te}) = 127,60 \end{array} \quad \begin{array}{l} ^{127}_{53}\text{I} \\ A_r(^{53}\text{I}) = 126,96 \end{array}$$

Такође, $A_r(18\text{Ar}) > A_r(19\text{K})$

0,3377 %	$^{36}_{18}\text{Ar}$	93,26 %	$^{39}_{19}\text{K}$
0,0630 %	$^{38}_{18}\text{Ar}$	0,012 %	$^{40}_{19}\text{K}$
99,600 %	$^{40}_{18}\text{Ar}$	6,730 %	$^{41}_{19}\text{K}$
$A_r(18\text{Ar}) = 39,95$		$A_r(19\text{K}) = 39,10$	

као и, $A_r(27\text{Co}) > A_r(28\text{Ni})$

68,077 %	$^{58}_{28}\text{Ni}$
26,223 %	$^{60}_{28}\text{Ni}$
1,140 %	$^{61}_{28}\text{Ni}$
3,635 %	$^{62}_{28}\text{Ni}$
100 %	$^{59}_{27}\text{Co}$
$A_r(27\text{Co}) = 58,93$	
$A_r(28\text{Ni}) = 58,69$	

2.1.3. МОЛАРНА МАСА

Релативне атомске масе су својство поједињих елемената, док је у случају супстанција погодно дефинисати неко групно својство. **Моларна маса** је дефинисана ако маса једног мола хемијског елемента или хемијског јединења.⁹ Овакву дефиницију омогућава својство да се у маси одређеног хемијског елемента, која је бројчано једнака релативној атомској маси тог елемента, налази исти број атома који је једнак Авогадровом броју - $N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$. Авогадров број може да се тумачи и као просечан број нуклеона у једном граму материје (сачињене од молекула/атома).¹⁰

Дефинисана на овај начин, моларна маса неког елемента X се са релативном атомском масом може повезати на једноставан начин:

$$\text{Моларна маса елемента } M(X) = A_r(X) \cdot \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad (2.1)$$

Задатак 2.6. Израчунати масе атома елемената C, P и Cr ако су дате њихове моларне масе.

Решење:

$$M(\text{C}) = 12,011 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad M(\text{P}) = 30,974 \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad M(\text{Cr}) = 51,996 \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$m_a(\text{C}) = \frac{M(\text{C})}{N_A} = \frac{12,011 \text{ g/mol}}{N_A} = 1,994 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

$$m_a(\text{P}) = \frac{M(\text{P})}{N_A} = \frac{30,974 \text{ g/mol}}{N_A} = 5,143 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

⁹Ово нас, међутим, не ограничава да дефинишемо моларну масу за стаклене кликере, лубенице или зрица пасуља.

¹⁰Електрони су у овом смислу потпуно занемарени.

$$m_a(\text{Cr}) = \frac{M(\text{Cr})}{N_A} = \frac{30,974 \text{ g/mol}}{N_A} = 8,634 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$$

Задатак 2.7. Израчунати масе атома елемената C, P и Cr ако су дате њихове релативне атомске масе.

Решење:

$$A_r(\text{C}) = 12,011 \quad A_r(\text{P}) = 30,974 \quad A_r(\text{Cr}) = 51,996$$

$$\begin{aligned} m_a(\text{C}) &= A_r(\text{C}) \quad m_u = A_r(\text{C}) \frac{1 \text{ g/mol}}{N_A} \\ &= A_r(\text{C}) \cdot 1,6605 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 1,994 \cdot 10^{-23} \text{ g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_a(\text{P}) &= A_r(\text{P}) \quad m_u = A_r(\text{P}) \frac{1 \text{ g/mol}}{N_A} \\ &= A_r(\text{P}) \cdot 1,6605 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 5,143 \cdot 10^{-23} \text{ g} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_a(\text{Cr}) &= A_r(\text{Cr}) \quad m_u = A_r(\text{Cr}) \frac{1 \text{ g/mol}}{N_A} \\ &= A_r(\text{Cr}) \cdot 1,6605 \cdot 10^{-24} \text{ g} = 8,634 \cdot 10^{-23} \text{ g} \end{aligned}$$

Задатак 2.8. Упоредити број атома који садржи по један грам атома елемената C, P и Cr.

Решење:

$$\begin{aligned} 12,011 \text{ g C} : 6,022 \cdot 10^{23} \text{ атома} &= 1 \text{ g} : x \\ x &= 5,013 \cdot 10^{22} \text{ атома C} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30,974 \text{ g P} : 6,022 \cdot 10^{23} \text{ атома} &= 1 \text{ g} : x \\ x &= 1,994 \cdot 10^{22} \text{ атома P} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 51,996 \text{ g Cr} : 6,022 \cdot 10^{23} \text{ атома} &= 1 \text{ g} : x \\ x &= 1,158 \cdot 10^{22} \text{ атома Cr} \end{aligned}$$

Задатак 2.9. Колико молова је садржано у 100 g чистих елемената C, P и Cr.

Решење:

$$n = \frac{m}{M}$$

$$n(\text{C}) = \frac{100 \text{ g}}{M(\text{C})} = 8,3257 \text{ mol}$$

$$n(\text{P}) = \frac{100 \text{ g}}{M(\text{P})} = 3,2285 \text{ mol}$$

$$n(\text{Cr}) = \frac{100 \text{ g}}{M(\text{Cr})} = 1,9232 \text{ mol}$$

Задатак 2.10. Израчунати моларну масу лубенице.

Решење:

Ако се узме да просечна лубеница има 5 kg, један мол лубеница има:
 $m = 5 \text{ kg} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} = 3,011 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ што значи да је моларна маса лубенице:

$$3,011 \cdot 10^{27} \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Малициозни коментар на овај задатак би био да у разматрање није узет „изотопски састав лубенице“. Ипак, како се дистрибуција масе лубенице може сматрати континуалном, придев *просечна* уз лубеница ову процену моларне масе чини нешто бољом. Такође, овај задатак је већ решен у оквиру *Задатка 1.7.*.

2.1.4. ДЕФЕКТ МАСЕ

У природи постоје елементи са само једним стабилним изотопом (што не значи да се вештачки не могу створити нестабилни изотопи). Неки типични примери би били ${}_{9}^{19}\text{F}$, ${}_{27}^{59}\text{Co}$ и ${}_{53}^{127}\text{I}$ са релативним атомским масама које износе 18,998, 58,933 и 126,964, редом. Лако је приметити да су њихове релативне атомске масе јако близке али не и једнаке масеним бројевима ових елемената: 19, 59 и 127. Ово је последица тзв. **дефекта масе** (Δm) који је дефинисан као разлика маса мировања слободних нуклеона и језгра које сачињавају:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_{\text{језгра}} \quad (2.2)$$

Питање је шта се дешава са овом масом? Она се приликом стварања језгра директно претвара у енергију везе језгра, односно енергију коју је потребно уложити како би се сви нуклеони из јегра које је у стању мировања превели у бесконачно удаљене слободне честице у стању мировања. Енергија везе се на овај начин може израчунати уз помоћ чувене Ајнштајнове (нем. Albert Einstein, 1879 - 1955) једначине:

$$E = mc^2 \quad (2.3)$$

а која проистиче и специјалне теорије релативности. **Ова релација је општа**, тј. важи за било који тип материје. Ако се неко тело приближава посматрачу брзином бликој брзини светлости, релативистичка маса се повећава како би из посматрачевог угла том телу било све теже да убрза до брзине светлоси c (ништа што има масу не може да се креће брзином светлости). Енергија мировања коју тело има у стању мировања је једнака mc^2 . Закон одржања енергије указује да, у било каквој реакцији, смањење масе у систему мора бити праћено повећањем кинетичке енергије честица у систему. Аналогно, маса у систему се може повећати на конто кинетичке енергије честица, односно прелазак честица у везано стање мора да се „наплати“ преко дефекта масе.

Задатак 2.11. Израчунати дефект масе код атома $^{56}_{26}\text{Fe}$, $^4_2\text{He}^{2+}$ (α честица) и ^2_1H (D).

Решење:

$$^{56}_{26}\text{Fe} \Rightarrow A = 56; Z = 26; N = 56 - 26 = 30$$

$$\begin{aligned} A_r(^{56}_{26}\text{Fe}) &= 55,9207 \Rightarrow m(^{56}_{26}\text{Fe}) = 55,9207 \cdot m_u = \\ &= 55,9207 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \end{aligned}$$

$$\Delta m = 26 \cdot m_{p^+} + 30 \cdot m_{n^0} - m(^{56}_{26}\text{Fe})$$

$$\Delta m = 8,7828 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

$$^4_2\text{He}^{2+} \Rightarrow A = 4; Z = 2; N = 2$$

$$A_r(^4_2\text{He}^{2+}) = 4,00153 \Rightarrow m(^4_2\text{He}^{2+}) = 4,00153 \cdot m_u$$

$$\Delta m = 2 \cdot m_{p^+} + 2 \cdot m_{n^0} - m(^4_2\text{He}^{2+})$$

$$\Delta m = 5,0463 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

$$^2_1\text{H} \Rightarrow A = 2; Z = 1; N = 1$$

$$A_r(^2_1\text{H}) = 2,01355 \Rightarrow m(^2_1\text{H}) = 2,01355 \cdot m_u$$

$$\Delta m = 1 \cdot m_{p^+} + 1 \cdot m_{n^0} - m(^2_1\text{H})$$

$$\Delta m = 4,0018 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

Да ли је у реду да се електрони изоставе приликом разматрања дефекта масе?

Задатак 2.12. Израчунати енергију везе (укупну и по нуклеону) за $^{56}_{26}\text{Fe}$, ^4_2He и ^2_1H . Који атом је најстабилнији?

Решење:

У претходном задатку су израчунати дефекти маса за ова три атома:

$$\Delta m(^{56}_{26}\text{Fe}) = 8,7828 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$$

$$\Delta m(^4_2\text{He}) = 5,0463 \cdot 10^{-29} \text{ kg}$$

$$\Delta m(^2_1\text{H}) = 4,0018 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

И коришћењем једначине 2.3 лако се налази да су енергије везе:

$$E_{\text{везе}}(^{56}_{26}\text{Fe}) = \Delta m(^{56}_{26}\text{Fe})c^2 = 7,9045 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

$$E_{\text{везе}}(^4_2\text{He}) = \Delta m(^4_2\text{He})c^2 = 4,5417 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$E_{\text{везе}}(^2_1\text{H}) = \Delta m(^2_1\text{H})c^2 = 3,6016 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Док се енергија везе по нуклеону једноставно добија дељењем енергије везе са масеним бројем, тј. укупним бројем нуклеона у језгру:

$$E_{\text{по нук.}}(^{56}_{26}\text{Fe}) = \frac{E_{\text{везе}}(^{56}_{26}\text{Fe})}{A(^{56}_{26}\text{Fe})} = 1,4115 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$E_{\text{по нук.}}(^4_2\text{He}) = \frac{E_{\text{везе}}(^4_2\text{He})}{A(^4_2\text{He})} = 1,1354 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

$$E_{\text{по нук.}}(^2_1\text{H}) = \frac{E_{\text{везе}}(^1_1\text{H})}{A(^2_1\text{H})} = 1,8008 \cdot 10^{-13} \text{ J}$$

Посматрајући енергије везе по нуклеону закључује се да је атом $^{56}_{26}\text{Fe}$ најстабилнији. Као што се може приметити, ове енергије су изузетно мале. Ипак, треба имати на уму да се ради о само једном атому!

Задатак 2.13. Претворити енергију по нуклеону из претходног задатка у eV. Колико килотона (ТНТ) енергије треба уложити да би се сви нуклеони једног мола атома $^{56}_{26}\text{Fe}$ раздвојили на бесконачну удаљеност?

Решење:

У физици честица се често користи јединица **електронволт** (eV) и представља кинетичку енергију коју један електрон добије када из стања мiroвања у електричном пољу убрза на разлици електричних потенцијала од једног волта. Енергија коју наелектрисане честице добијају у електричном пољу се може израчунати као:

$$E = qU \quad [1 \text{ J} = 1 \text{ C} \cdot \text{V}] \quad (2.4)$$

Односно, у случају када је наелектрисање q једнако наелектрисању електрона e , и када је разлика потенцијала U једнака 1 V, следи да је: $1 \text{ eV} = 1,602 \, 176 \, 634 \cdot 10^{-19} \text{ J}$

У конкретном случају за дате атоме:

$$E_{\text{по нук.}}(^{56}_{26}\text{Fe}) = \frac{1,4115 \cdot 10^{-12}}{1,6022 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 8,8 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{по нук.}}(^4_2\text{He}) = \frac{1,1354 \cdot 10^{-12}}{1,6022 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 7,1 \text{ MeV}$$

$$E_{\text{по нук.}}(^2_1\text{H}) = \frac{1,8008 \cdot 10^{-13}}{1,6022 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 1,1 \text{ MeV}$$

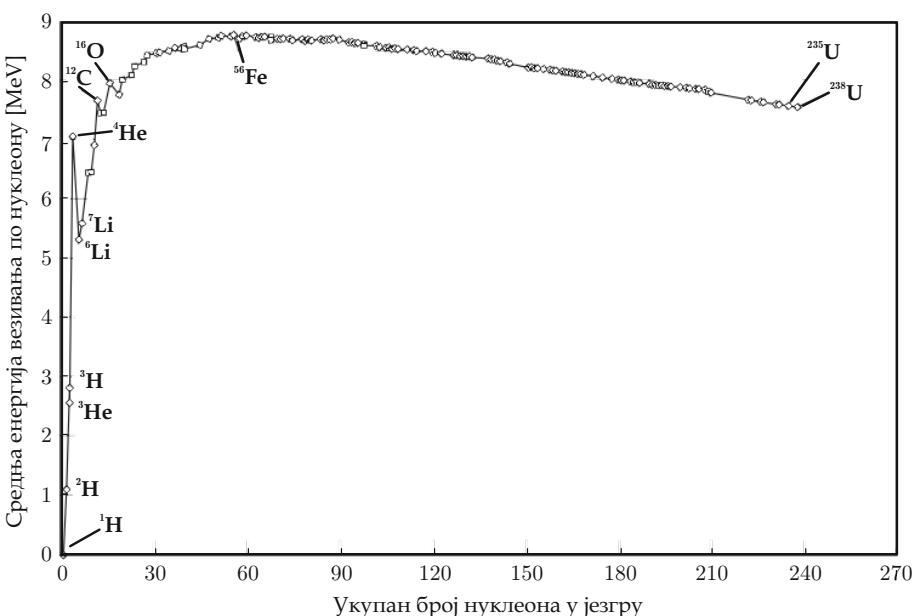
Килотони ТНТ-а се, с друге стране, користе како би се описала потенцијална деструктивност експлозивних материјала. Тринитротолуен (ТНТ) се узима као референтна експлозивна материја. Енергија која се ослободи приликом детонације 1000 тона ТНТ (1 килотон) је једнака $4,184 \cdot 10^{12} \text{ J}$.

За један мол атома $^{56}_{26}\text{Fe}$ укупна енергија складиштена у енергијама везе је:

$$\begin{aligned} E_{\text{укупно, 1 mol}} &= 1 \text{ mol} \cdot N_A \cdot E_{\text{везе}} \\ &= 1 \text{ mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} \cdot 7,9045 \cdot 10^{-11} \text{ J} \\ &= 4,7601 \cdot 10^{13} \text{ J} = 11,38 \text{ килотона ТНТ} \end{aligned}$$

Дакле, за овај теоретски експлозив (разлагање једног мола, односно ≈ 59 g, гвожђа до бесконачно удаљених нуклеона) би било потребно уложити онолико енергије колико се ослободи приликом детонације око 11 000 тона ТНТ-а. Најјаче оружје које је човек икада детонирао (за сад) је Цар бомба (рус. Царь-бомба) са експлозивном снагом еквивалентном детонацији 50 000 000 – 58 000 000 тона ТНТ, односно 50 – 58 мегатона ТНТ.

Слика 2.1. Средња енергија везивања по нуклеону за све познате изотопе свих елемената периодног система.



Из претходног задатка се види да језгро атома ^{56}Fe има велику енергију везе по нуклеону (8,79036 MeV). Ако израчунамо енергију везе за све познате елементе (за све њихове изотопе) видећемо да од атома ^{56}Fe већу енергију везе по нуклеону имају само ^{58}Fe и ^{62}Ni , 8,79214 MeV и 8,79460 MeV, редом. На Слици 2.1 су приказане енергије везивања по нуклеону за све познате изотопе. Са слике се види и да неки изотопи испољавају посебно велику стабилност, попут ^{16}O и ^4He , што има везе са „магичним” бројевима нуклеона.¹¹ Наиме, изотопи са парним бројем протона и неутрона испољавају већу стабилност од осталих. Иако је ^{62}Ni најстабилнији атом од свих, ипак у Звездама које су при крају свог живота (непосредно пре супернове) најзаступљенији су изотопи гвожђа ^{58}Fe и ^{56}Fe , с обзиром да је

¹¹ Више о овоме на предмету „Радиохемија и нуклеарна хемија“.

$^{62}_{28}\text{Ni}$ подложен фотодезинтеграцији као и другим нуклеарним реакцијама за које има велики ефикасни пресек. Како онда постоје тежи елементи од ових изотопа у природи попут уранцијума?

Од значаја је поменути и нуклеарне реакције **фузије** и **фисије**. И при једној и при другој нуклеарној реакцији долази до ослобађања енергије. У првом случају се ради о спајању два лака језгра у стабилније, теже, језгро. Том приликом долази до ослобађања великих количина енергије (погледати задатак 2.12 као и да је на Слици 2.1 приказана енергија везе по нуклеону). У случају фисије долази до разлагања масивних језгара што такође води ка стабилнијим јегрима и ослобађању великих количина енергије.¹²

Задатак 2.14. Упоредити енергије везивања у језгру (између нуклеона) и атому (између језгра и електрона) на примеру атома ^2H чија је енергија јонизације 15,5 eV.

Решење:

Енергија јонизације представља енергију потребну довести изолованом атому у гасовитом стању како би се на бесконачну удаљеност изместио најслабије везани електрон.

У претходном задатку је израчуната енергија везивања по нуклеону за атом ^2H :

$$E_{\text{по нук.}} \approx 1,1 \text{ MeV} = 1\,100\,000 \text{ eV}$$

Ако овај број упоредимо са енергијом јонизације која износи 15,5 eV, видимо да је везивање између нуклеона око 7000 пута јаче у односу на везивање електрона у истом атому. Ова груба процена даје одговор на питање из Задатка 2.11.

Задатак 2.15. Колико енергије је потребно уложити да би се јонизовао 1 mol атома водоника? Енергија јонизације елементарног атома водоника износи 13,6 eV.

Решење:

Ако за један атом водоника енергија јонизације износи $E_I = 13,6 \text{ eV}$, онда је за један мол потребно:

$$E_{I,\text{mol}} = E_I N_A = 13,6 \text{ eV} \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{mol}} = 1312,03 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

Задатак 2.16. Лампа снаге 100 W сија непрекидно 2 сата. Колики је дефект масе лампе услед губитка енергије путем светlostи? Сматрати да се сва енергија троши на стварање светlostи.

¹²Човек је ово, наравно, искористио како би произвео енергију у нуклеарним реакторима. Такође, човек је ово употребио и за оружје - атомске (фисионе), термонуклеарне (фузионе) бомбе као и многе друге деструктивне креације.

Решење:

Дефект масе се и у овом случају може израчунати помоћу једначине 2.3:

$$\begin{aligned}\Delta m &= \frac{E}{c^2} = \frac{P \cdot t}{c^2} \\ &= \frac{100 \text{ W} \cdot 2 \cdot 3600 \text{ s}}{(2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2} \\ &= 8,0112 \cdot 10^{-12} \text{ kg} = 8,0112 \text{ pg}\end{aligned}$$

Ако лампа има 100 g, колико дugo би требало да сија како би потрошила 1 % своје масе?

2.2. ФУНДАМЕНТАЛНЕ СИЛЕ (ИНТЕРАКЦИЈЕ)

Фундаменталне интеракције или фундаменталне сile су иредуцибилне интеракције у природи, односно интеракције које се не могу изделити на основније. Ове интеракције су сумиране у Табели 2.2 док су нека својства носиоца интеракција сумирана у Табели 2.3.

Табела 2.2. Фундаменталне интеракције у природи.

Интеракција	Медијатор интеракције	Релативна јачина ^a	Зависност од удаљености	Домет [m] ^a
Слаба	W^\pm и Z^0 бозони	10^{-6}	$\sim (1/r) e^{-m(W^\pm, Z^0)r}$	10^{-18}
Јака	глуони	1	$\sim r$	10^{-15}
Електромагнетна	фотони	1/137	$\sim 1/r$	∞
Гравитациона	гравитони ^b	$6 \cdot 10^{-39}$	$\sim 1/r$	∞

^a Егзактне јачине и домети интеракција зависе од особина и типа честица које интереагују.

^b Хипотетички преносиоци интеракције - нису експериментално потврђени.

Свака од основне интеракције се може математички описати физичким пољем. Физичка поља за слабу, јаку и електромагнетну интеракцију су квантirана (дискретна) док се за гравитационо поље то још увек није показало. Теорија квантне гравитације тренутно представља највећу непознаницу модерне физике.

Гравитациону интеракцију осећају све честице које имају масу. На атомском нивоу, гравитација је најслабија од све четири основне интерак-

Табела 2.3. Нека својства медијатора (носиоца) интеракције.

Медијатор интеракције	Спин	Наелектрисање [e]	Маса мировања [GeV/c^2]
W^\pm	$s = 1$	$q = \pm 1$	$m = 80,4$
Z^0	$s = 1$	$q = 0$	$m = 91,2$
глуон	$s = 1$	$q = 0$	$m = 0$
фотон	$s = 1$	$q = 0$	$m = 0$
гравитон	$s = 2$	$q = 0$	$m = 0$

Обратити пажњу на масе W^\pm и Z^0 бозона. Да ли иста наведена својства код глуона и фотона значи да ти преносиоци интеракције имају исто физичко поље? Шта значи када преносиоци интеракције имају масу мировања једнаку нули?

ције. Гравитационо привлачење два тела масе m_1 и m_2 је дато Њутновим (енгл. Sir Isaac Newton PRS, 1642 – 1726/¹³) законом гравитације:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (2.5)$$

где су γ гравитациона константа¹⁴ која износи $6,674\,30 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$ и r растојање између два тела масе m_1 и m_2 .

Електромагнетне интеракције се јављају између свих наелектрисаних честица. Део ове интеракције се може тумачити уз помоћ електростатичке интеракције која се јавља када наелектрисане честице мирују и у том случају се сила која делује између њих може проценити уз помоћ Кулоновог (фра. Charles-Augustin Coulomb, 1736-1806) закона:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (2.6)$$

где је ϵ_0 диелектрична константа (пермитивност) вакуума и износи $8,854 \cdot 10^{-12} \text{F/m}$, q_1 и q_2 наелектрисања честица и r растојање између честица. Уколико се наелектрисана честица креће у магнетном пољу на њу ће деловати магнетна сила која се може израчунати помоћу Лоренцове (хол. Hendrik Antoon Lorentz, 1853 - 1928) једначине:

$$\vec{F}_l = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \quad (2.7)$$

где су \vec{E} електрично поље и \vec{B} магнетно поље које делују на честицу која се креће брзином \vec{v} и има наелектрисање q . Други члан у овој једначини се односи на магнетну компоненту силе. Магнетно поље \vec{B} може бити стално магнетно поље од неког на пример преманентног магнета. У том

¹³За збрку око године(!) смрти једног од највећих научника свих времена консултовати веб страницу:

<https://thonyc.wordpress.com/2015/03/20/calendrical-confusion-or-just-when-did-newton-die/>

¹⁴Најлошије одређена фундаментална константа.

случају магнетну силу која делује на наелектрисану честицу је лако израчунати.¹⁵ У случају да је потребно описати магнетно поље наелектрисане честице која се креће (константном брзином) или на пример магнетно поље металног проводника кроз који противиче електрична струја константне јачине, најпогодније је користити Био-Саваров (фра. Jean-Baptiste Biot, 1774 - 1862; Félix Savart, 1791 - 1841) закон:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}'}{|\vec{r}'|^3} \quad (2.8)$$

где је μ_0 магнетна пермеабилност вакуума и износи $1, 256 637 \cdot 10^{-6}$ Н/m¹⁶, I јачина струје кроз проводник, $d\vec{l}$ диференцијални елемент вектора постављен дуж проводника постављеног дуж пута C , $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{l}$ је растојање између диференцијалног елемента вектора $d\vec{l}$ и тачке \vec{r} у којој се израчунава вредност магнетног поља $\vec{B}(\vec{r})$. Овај закон може бити поприлично тешко употребљив (у аналитичком смислу) у зависности од тога колико је компликована путања кретања наелектрисања (C) које ствара магнетно поље \vec{B} . Генерализацију Био-Саваровог закона у смислу узимања у обзир релативистичких ефеката (коначне брзине светlosti) је дао Јефименко (рус. Олег Дмитриевич Ефименко, 1922 - 2009). По датуму рођења твораца једначина 2.6, 2.7 и 2.8 може се закључити да су оне важеће у класичном лимиту, односно да у њима нема инкорпориране квантне теорије.

Слаба интеракција делује унутар самог атомског језгра. Сама природа интеракције је веома компликована и делује само на изузетно малим растојањима и сматра се да је заслужна за одређене типове радиокативних распада с обзиром да може да утиче на промену структуре самих нуклеона. На пример, приликом β^+ распада долази до трансформације: $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_{e^-}$ унутар атомског језгра.¹⁷ Оваква трансформација доводи до фундаменталне промене атомског језгра, односно до промене типа елемента с обзиром да се посредством слабе сile један неутрон трансформисао у протон те да је дошло до повећања атомског броја за један. Још једна интересантна ствар је да слаба сила не може да произведе везана стања између честице на субатомском нивоу, а исто се може рећи и за гравитациону силу на астрономским скалама.

Јака интеракција је најјача од све четири фундаменталне интеракције и комбинује особине електромагнетне интеракције (у смислу јачине) и слабе интеракције (у смислу домета деловања). Јака интеракција држи нуклеоне на окупу у атомском језгру. Да нема ове интеракције, протони

¹⁵Условно речено. Ако у некој књизи из физике/физичке хемије нађете на флоскулу: „Лако је показати“ или „Лако израчунати“, немојте ни тренутка помислити да ћете исто урадити са лакоћом.

¹⁶Диелектрична пермитивност (ϵ_0) и магнетна пермеабилност (μ_0) су у тесној вези:

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

¹⁷ $\bar{\nu}_{e^-}$ је једна од елементарних честица која се назива електронски антинеутрино.

би се „разлетели” један од другог, с обзиром на електростатичко одбијање. Интересантно је се јачина ове интеракције скалира дosta другачије од осталих сила (Табела 2.2).

Задатак 2.17. Упоредити електромагнетну, гравитациону и јаку силу између два протона на растојању од 10^{-15} m (два протона у језгру).

Решење:

Увешћемо следеће ознаке за интеракције: g - гравитациона, em - електромагнетна, s - јака, w - слаба. Гравитациона и електромагнетна (електростатичка) интеракција се могу проценити уз помоћ једначина 2.5 и 2.6:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67430 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{(1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ kg})^2}{(10^{-15} \text{ m})^2} = 1,9 \cdot 10^{-34} \text{ N}$$

$$F_{em} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi \cdot 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2 \text{N}}} \cdot \frac{(1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(10^{-15} \text{ m})^2} = 230 \text{ N}$$

док се јака и слаба интеракција могу проценити релативно, знајући вредности из Табеле 2.2:

$$F_s = 137 F_{em} = 31510 \text{ N} \approx 30000 \text{ N}$$

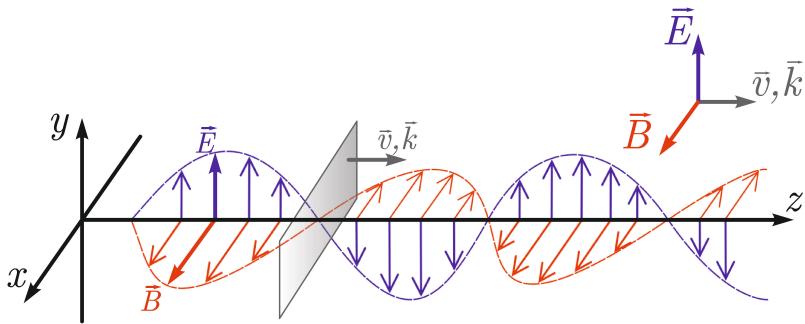
$$F_w = 10^{-6} F_s \approx 0,03 \text{ N}$$

Процена показује да је јака сила, као и што сам назив сугерише, убедљиво најјаче делује на два протона који се налазе настојању које је реда величине радијуса атомског језгра. 30000 N одговара тежини тела које има масу од 3 тоне и стоји негде на површини Земље! Најслабија интеракција у овом случају није слаба интеракција (баш незгодно што се тако зове), већ гравитациона. Ово показује колико је битан дomet слабе и јаке интеракције.

2.3. ЕЛЕКТРОМАГНЕТНО ЗРАЧЕЊЕ

Спектар у општем случају представља континуалну или дискретну уређеност неког физичког својства у односу на енергију. У физичкохемијским наукама од посебног значаја је спектар електромагнетног зрачења. **Електромагнетно зрачење** се састоји од таласа електромагнетног поља која се простиру кроз простор и са собом носе енергију у виду зрачења (радијације). Електромагнетно поље је (у класичном смислу - погледати поглавље 3) физичко поље које производе наелектрисања која се убрзано крећу и сачињено је од синхронизованих осцилујућих електрич-

Слика 2.2. Електромагнетни талас линеарно поларизован дуж y -осе који се простира дуж z -осе. \vec{E} и \vec{B} означавају узајамно нормална електрична и магнетна поља. \vec{k} означава таласни вектор који је нормалан на таласни фронт (сиви правоугаоник).



них и магнетних поља. Један такав електромагнетни талас је илустрован на слици 2.2. Електромагнетни талас са слике 2.2 је линеарно поларизован дуж y -осе, што значи да му вектор електричног поља осцилује искључиво у yz -равни.¹⁸ У вакууму, електромагнетни таласи се простиру¹⁹ брзином светlostи, c . Електромагнетни таласи су трансферзални таласи²⁰ и у хомогеним и оптички изотропним срединама вектори електричног и магнетног поља су узајамно нормални. Типови електромагнетног зрачења уређеног по фреквенцијама (енергијама, или таласним дужинама) су приказани у табели 2.4. Алтернативно, у оквиру квантне теорије (погледати поглавље 3), електромагнетни таласи се могу посматрати као физичко поље сачињено од фотона (погледати табелу 2.2), ненаелектрисаних елементарних честица које немају масу (мировања) и представљају медијаторе (носиоце) електромагнетних интеракција. Фотони су способни да интереагују са материјом и у зависности од фреквенције и снаге зрачења да изазивају различите промене у њој. Најгрубља подела електромагнетног зрачења је на јонизујуће и нејонизујуће, у зависности од тога да ли фотони електромагнетних таласа могу да изазову хемијске промене у облику атомима/молекулама или не. Хемијске промене у овом смислу подразумевају да долази до јонизације атома у материји и последично до измене електронске структуре. Тако јонизовани атоми унутар материје лако могу да ступе у (фото)хемијске реакције. Грана физике која се бави међусобном интеракцијом фотона и интеракцијом фотона са материјом се зове (квантна) електродинамика.

¹⁸Више о типовима поларизације електромагнетних таласа на предмету „Општи курс физичке хемије 1”.

¹⁹Њихов таласни фронт.

²⁰Трансферзални таласи су таласи код којих се осцилације врше нормално у односу на правац простирања. Супротно њима, лонгитудинални таласи су таласи код којих се осцилације врше паралелно са правцем простирања таласа. Типични примери трансферзалних и лонгитудиналних таласа су морски таласи и звук, редом.

Табела 2.4. Класификација електромагнетног зрачења и енергетски опсези.

		Тип зрачења, назив и ознаке	Голанска дужина λ	Фреквенција ν	Енергија по фотону $E = h\nu$
Јонизујуће	гама	γ	<1 pm	$>3 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$	>1,24 MeV
	X	тврдо X	1 pm–10 pm	$3 \cdot 10^{20} \text{ Hz} - 3 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$	1,24 MeV–124 keV
		меко X	10 pm–10 nm	$3 \cdot 10^{19} \text{ Hz} - 3 \cdot 10^{16} \text{ Hz}$	124 keV–124 eV
	вакуумско	EUV	10 nm–121 nm	$3 \cdot 10^{16} \text{ Hz} - 2 \cdot 48 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	124 eV–10,25 eV
	екстремно	H-Луплан- α	121 nm–122 nm	$2,48 \cdot 10^{15} \text{ Hz} - 2,46 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	10,25 eV–10,16 eV
	Јајман α		далеко	$2,46 \cdot 10^{15} \text{ Hz} - 1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	10,16 eV–6,2 eV
	F-UV		средње	$1,5 \cdot 10^{15} \text{ Hz} - 1,1 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$	6,2 eV–4,4 eV
	Ултраубичасто	UV-C	блиско	280 nm–315 nm	1,1 · $10^{15} \text{ Hz} - 9,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
		UV-B	UV-A	315 nm–380 nm	$9,5 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 7,9 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
				380 nm–450 nm	$7,9 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 6,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$
Видљиво	љубичасто			$6,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 6,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	2,8 eV–2,6 eV
	плаво			$6,2 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 6,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	2,6 eV–2,5 eV
	тиризвно	VIS		$6,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 5,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	2,5 eV–2,2 eV
	зелено			$5,3 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 5,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	2,2 eV–2,1 eV
	жуто			$5,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 4,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	2,1 eV–2,0 eV
	наранџасто			$4,8 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 4,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	2,0 eV–1,7 eV
	црвено	IR-A	NIR, IR-A	$4,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 2,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	1,7 eV–0,9 eV
	блиско	IR-B	SWIR, IR-B	$2,1 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 1,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$	0,9 eV–0,4 eV
	кракотајасно		MR	$1,0 \cdot 10^{14} \text{ Hz} - 3,7 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$	0,4 eV–0,2 eV
	средње	IR-C	LWIR	$8 \mu\text{m} - 15 \mu\text{m}$	$3,7 \cdot 10^{13} \text{ Hz} - 2,0 \cdot 10^{13} \text{ Hz}$
Нејонизујуће	дуготајасно		FIR	$15 \mu\text{m} - 1000 \mu\text{m}$	$2,0 \cdot 10^{13} \text{ Hz} - 3 \cdot 10^{11} \text{ Hz}$
	далеко		EHF	1 mm–100 mm	$3 \cdot 10^{11} \text{ Hz} - 3 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$
	екстремно високо		SHF	1 cm–10 cm	$3 \cdot 10^{10} \text{ Hz} - 3 \cdot 10^9 \text{ Hz}$
	супер високо		UHF	10 cm–100 cm	$3 \cdot 10^9 \text{ Hz} - 3 \cdot 10^8 \text{ Hz}$
	ултра-високо		VHF	1 m–10 m	$3 \cdot 10^8 \text{ Hz} - 3 \cdot 10^7 \text{ Hz}$
	вома високо		HF	10 m–100 m	$3 \cdot 10^7 \text{ Hz} - 3 \cdot 10^6 \text{ Hz}$
	високо		MF	100 m–1000 m	$3 \cdot 10^6 \text{ Hz} - 3 \cdot 10^5 \text{ Hz}$
	средње			1 km–10 km	$3 \cdot 10^5 \text{ Hz} - 3 \cdot 10^4 \text{ Hz}$
	ниско			10 km–100 km	$3 \cdot 10^4 \text{ Hz} - 3 \cdot 10^3 \text{ Hz}$
	веома ниско	VLF		100 km–1 Mn	$3000 \text{ Hz} - 300 \text{ Hz}$
Радарсквентно	ултра-ниско	ULF		1 Mn–10 Mn	$300 \text{ Hz} - 30 \text{ Hz}$
	супер ниско	SUF		10 Mn–100 Mn	$30 \text{ Hz} - 3 \text{ Hz}$
	екстремно ниско	ELF			0,1 peV–0,01 peV

Фотони се најбрже крећу у вакууму (максималном брзином), брзином светлости c . У другим, оптички гушћим, срединама фотони се могу кретати и много спорије, па се тако нпр. видљива зелена светлост (≈ 500 nm) креће око 2,5 пута и 3,6 пута спорије када пролази кроз дијамант и галијум-фосфид, редом. Научна дискусија око брзине светлости се интензивирала крајем 19. века, с обзиром да се различите експерименталне аномалије [Физоов (фра. Armand Hippolyte Fizeau, 1819-1896) експеримент, светлосна аберација] нису могле објаснити простом таласном теоријом светлости. 1905. године Ајнштајн представља своју Специјалну теорију релативности²¹ у којој су простор и време подложни променама у односу на брзину кретања што је дало објашњење да је брзина електромагнетних таласа константна из угла свих посматрача, чак и оних који се крећу релативно једни у односу на друге.

Поред најгрубље поделе на јонизујуће и нејонизујуће зрачење (табела 2.4), електромагнетни таласи се могу разврстati и у друге класе, нпр. у спектроскопске регионе²²:

- Гама (γ) зрачење
- Рендгенско (X) зрачење
- Ултраљубичасто (енгл. ultraviolet - UV) зрачење
- Видљиво (енгл. visible - VIS) зрачење
- Инфрацрвено (енгл. infrared - IR) зрачење
- Микроталасно (енгл. microwave - MW) зрачење
- Радиофреквентно (енгл. radiofrequent - RF) зрачење

поређане по енергијама од већих ка мањим. Границе за поделе по одређеним типовима електромагнетног зрачења нису јасно дефинисане а у табели 2.4 поменутi региони су разграничили на начин на који се то најчешће среће у литератури. Типови, као и особине, електромагнетног зрачења се мењају континуално, као и њихова енергија. Овакви називи потичу од наочина на који електромагнетни таласи одређених енергија интерагују са материјом, односно према механизму настајања. γ зрачење високе енергије настаје приликом анхилације или настајања парова честица-античестица, док је γ зрачење нешто нижих енергија способно да интерагује са најјачим везаним електронима код најтежих хемијских елемената као и са језгрима атома. Такође, настаје приликом различитих нуклеарних реакција. X зрачење се везује за интеракцију са најјачим везаним електронима свих

²¹Специјална теорија релативности се заснива на два постулата:

- Закони физике су инваријантни (идентични), у свим инерцијалним системима референце, тј. у оним системима референце који не убрзавају.
- Брзина светлости (електромагнетног зрачења) је константна за све посматраче, независно од тога да ли се извор светлости или посматрач налазе у релативном кретању.

²²Са физичкохемијског аспекта спектроскопска подела је можда и најбитнија.

хемијских елемената (не само најтежих). На примеру γ и X зрачења се већ види да се не може подврести јасна граница у спектру. Стога се за X зрачење сматра сво оно зрачење које може да интреагује са најјаче везаним (невалентним) електронима у атомима, а за γ зрачење сво оно зрачење које може да интреагује са нуклеонима унутар језгара атома. UV зрачење интреагује са валентним електронима у молекулама и атомима, укључујући могућност јонизације молекула/атома. VIS зрачење је заслужно за промену електронског стања молекула укључујући и пигментне молекуле који се налазе у људском оку (ретини) што нам омогућава да региструјемо (видимо/доживимо) овај део спектра без посебне апаратуре. IR зрачење настаје приликом молекулских вибрација и њега такође можемо да региструјемо - као „топлоту”.²³ Микроталасно и далеко IR зрачење настаје приликом ротације молекула, док радиоталаси настају колективним осцилацијама носилаца наелектрисања у проводним материјалима (најбољи пример би биле осцилације електрона у антенама).

Оваква подела електромагнетног зрачења класификује и различите типове спектроскопија које се у многим применама заснивају на томе да се региструје интензитет апсорбованог или емитованог електромагнетног зрачења у функцији енергије (фреквенције, таласне дужине итд.). Тако нпр. могу да се разликују микроталасне, IR, близке IR, UV-VIS, X и γ спектроскопије.²⁴

За математички опис електромагнетних таласа, као и осталих врста таласа, се користи неколико устаљених величина. Уопштена репрезентација таласа (његове амплитуде у простору у функцији времена) је дата парцијалном диференцијалном једначином другог реда која је позната као **таласна једначина**:

$$\frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.9)$$

где $u(\vec{r}, t)$ представља временски зависну амплитуду а v брзину таласа. У случају електромагнетних таласа $v = c$. Амплитуда таласа, у општем случају, може имати облик:

$$u(\vec{r}, t) = u_1(\vec{r} - \vec{v}t) + u_2(\vec{r} + \vec{v}t) \quad (2.10)$$

чије две компоненте u_1 и u_2 описују кретање таласа у два супротна правца брзином v . Брзина пропагације таласа се назива и **фазна брзина** и често се означава са v_p (од енглеске речи за фазу - phase). Амплитуда таласа у општем случају може имати изузетно комплексовану зависност од положаја и времена. Три специјална случаја којима ћемо се често служити су синусоидални таласни, равни таласи и стојећи таласи.

Синусоидални таласи су представљени периодичним тригонометријским

²³ Ако IR зрачење има превелик интензитет, вероватно ћемо најпре да доживимо његове последице. Такође, γ и X зрачење се може доживети посредно, преко последица које изазивају на биолошким молекулама.

²⁴ Детаљно о великом броју спектроскопских метода на предметима: „Атомска спектрохемија”, „Молекулска спектрохемија”, „Биофизичка хемија 1”, „Физичка хемија чврстог стања”, „Физичкохемијска анализа”, „Радиохемија и нукларна хемија”.

функцијама²⁵. У случају једног прогресивног синусоидалног таласа, амплитуда може имати следећи облик:

$$u(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) + D \quad (2.11)$$

где су A , φ и D константе, ω - угаона фреквенција која је повезана са линеарном фреквенцијом преко релације $\omega = 2\pi\nu$ и \vec{k} таласни вектор који је нормалан на таласни фронт и чији је интензитет дефинисан као:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi\nu}{v_p} = \frac{2\pi}{v_p T} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.12)$$

па се фазна брзина може изразити и као:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \quad (2.13)$$

Поред фазне брзине, дефинише се и групна брзина (v_g) која је корисна у случају када треба да се ошире пропагација групе таласа који суперпозицијом (сабирањем) дају резултујући талас. Групна брзина је дефинисана као:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \quad (2.14)$$

Задатак 2.18. Доказати да се групна брзина таласа може рачунати помоћу релације 2.14.

Решење:

Узмимо случај суперпозиције два таласа описаних следећим функцијама:

$$f_1(\vec{r}, t) = \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) \quad \text{и} \quad f_2(\vec{r}, t) = \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)$$

онда следи да суперпонирани талас има форму:

$$\begin{aligned} f(\vec{r}, t) &= f_1(\vec{r}, t) + f_2(\vec{r}, t) = \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \\ &= 2 \cos\left(\frac{1}{2}((\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - (\omega_2 - \omega_1)t)\right) \cos\left(\frac{1}{2}((\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - (\omega_2 + \omega_1)t)\right) \end{aligned}$$

$$f(\vec{r}, t) = f'_1(\vec{r}, t) f'_2(\vec{r}, t)$$

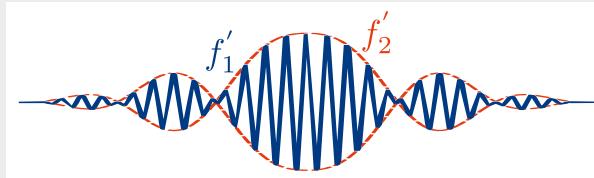
што практично представља производ два таласа, f'_1 и f'_2 , где је:

$$f'_1 = \text{const} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}((\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - (\omega_2 - \omega_1)t)\right)$$

$$f'_2 = \text{const} \cdot \cos\left(\frac{1}{2}((\vec{k}_2 + \vec{k}_1) \cdot \vec{r} - (\omega_2 + \omega_1)t)\right)$$

²⁵Синус (sin) и косинус (cos), а у општем случају се може користити и експоненцијални облик, односно Ојлерова (нем. Leonhard Euler, 1707-1783) формула:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$$



Талас описан са f'_1 је „упакован унутар таласа“ f'_2 . Фазна брзина „упакованог“ таласа заправо представља групну брзину суперпонираног таласа $f(\vec{r}, t)$:

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{|\vec{k}_2 - \vec{k}_1|} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

односно у случају бесконачно малих промена (континуално диференцијални случај) се добија:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

што је и довољан доказ.

Други специјалан случај таласа од интереса је **раван талас**. Као што га назив описује, равни талас је талас код кога је таласни фронт описан са равни која је нормална на правац простирања таласа. Амплитуда таласног фронта једнака је у било којој тачки таласног фронта. Равни талас може да се опише једначином:

$$\Phi = A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (2.15)$$

Важно је напоменути да равни таласи могу да буду и трансферзални и лонгitudинални али да електромагнетни равни таласи морају бити трансферзални. Равни таласи су идеализација, међутим, ако се талас који се простире од тачкастог извора нађе довољно далеко од њега, његов сферни таласни фронт ће постати раван, односно равни таласни фронт. Физичко поље које се понаша на овај начин, а налази се далеко од свог извора се назива далеко поље (енгл. far-field).²⁶

Задатак 2.19. Показати да једначина равног таласа 2.15 задовољава таласну једначину 2.9.

Решење:

²⁶ Пример равног таласа је електромагнетно зрачење које долази са Сунца на Земљу. Равни талас је добра апроксимација у овом случају с обзиром на велико растојање између Сунца и Земље чинећи чак и да се Сунце може сматрати тачкастим извором (електромагнетних) таласа.

Довољно је уврстити једначину 2.15 у једначину 2.9:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) &= \\ = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right) \end{aligned}$$

и имајући у виду да је $\vec{k} \cdot \vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z$:

$$\frac{-\omega^2}{v^2} \Phi^2 = -k_x^2 \Phi^2 - k_y^2 \Phi^2 - k_z^2 \Phi^2$$

као и то да је интензитет таласног вектора $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$, и да се угаона фреквенција може записати као $\omega = 2\pi\nu$, добија се:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\pi\nu}{v} \right)^2 &= k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = |\vec{k}|^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \\ \frac{2\pi\nu}{v} &= \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow v = \lambda\nu \end{aligned}$$

што је довољан доказ.

Стојећи или стационарни таласи су таласи чија амплитуда осцилује у току времена али се положаји у којима амплитуда достиже свој максимум не померају у простору. Супротно положајима у којима амплитуда достиже максимум, постоје и тзв. чворна места код којих амплитуда једнака нули. Чворна места су такође непомична у простору. Стојећи таласи могу да се тумаче као резултат слагања два идентична таласа која се простиру у супротном смеру. Типичан пример механичког стојећег таласа је вибраирајућа жица неког жичаног инструмента.

Задатак 2.20. Извести једначину стојећег таласа, полазећи од два синусоидална таласа исте амплитуде која се простиру у супротним смеровима.

Решење:

Нека два идентична прогресивна синусоидална таласа супротних смерова узму облик:

$$f_1(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \quad \text{и} \quad f_2(\vec{r}, t) = A \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega t)$$

Односно ако се задржимо у једној димензији:

$$f_1(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t\right) \quad \text{и} \quad f_2(x, t) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t\right)$$

Суперпозиција ова два таласа даје:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= f_1(x, t) + f_2(x, t) = \\ &= 2A\sin\left(\frac{\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t + \frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t}{2}\right)\cos\left(\frac{\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t}{2}\right) = \\ &= 2A\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos(\omega t) = \\ &= A'(t)\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

односно добија се једначина таласа чија се амплитуда мења у времену али не и положај, тј. да се ради о стојећем таласу. Ако је стојећи талас „заточен” у некаквом коначном медијуму (попут механичког таласа ограниченог унутар осцилујуће жице на неком жичаном инструменту) онда морају важити два гранична услова:

$$f(0, t) = 0$$

$$f(L, t) = A'(t)\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0$$

Други гранични услов даје могуће таласне дужине/фреквенције којима би овакав талас могао да осцилује:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{2L}{n} \quad \nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L} \end{aligned}$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$

Сви таласни, па и електромагнетни, подлежу феноменима интерференције и дифракције. **Интерференција**²⁷ је феномен слагања (суперпозиције или сабирања²⁸) таласа у свакој тачки у простору и времену, при чему долази до стварања новог, резултујућег таласа. У општем случају нема ограничења на облик и амплитуду резултујућег таласа али се посебно наглашава случај када долази до конструктивне и деструктивне интерференције. До конструкције и деструктивне интерференције долази када долази до слагања кохерентних таласа²⁹ који имају исту односно супротну

²⁷Интерференција је већ математички описана у задацима 2.18 и 2.20.

²⁸Принцип суперпозиције таласа гласи да је поремећај у средини изазван од стране више различитих таласа еквивалентан поремећају изазваном од стране појединачних таласа.

²⁹Кохерентни таласи су таласи који су описаны истом фреквенцијом и таласном формом, односно математичким моделом. Исти математички модел не подразумева да таласи имају исту фазу јер управо разлика у фазама може да доведе до конструкције и деструктивне интерференције. Да ли су комерцијално доступни извори светлости кохерентни?

фазу, респективно. **Дифракција** је одступање од праволинијског простирања таласа приликом наиласка на препреку (нетранспарентну средину за посматрани талас). Дифракција је посебно изражена уколико је препрека димензија које су реда величине таласне дужине таласа. У класичној физици, дифракција је описана Хајгенс-Френеловим (хол. Christiaan Huygens, 1629 - 1695; фра. Augustin Jean Fresnel, 1788 - 1827) принципом који гласи да свака тачка до које допре талас, односно његов таласни фронт, постаје нови извор секундарних таласа исте фреквенције и брзине и да се нови таласни фронт добија суперпозицијом новонасталих секундарних таласа. Суштински нема разлике између интерференције и дифракције, оба феномена подразумевају да долази до суперпозиције таласа. Разлика је у међусобном положају извора таласа. Код интерференције се ради о малом броју просторно раздвојених таласа, док се код дифракције ради о великом броју континуално и близко распоређених извора таласа.

Електромагнетни таласи се могу описати и Максвеловим једначинама (енгл. James Clerk Maxwell FRSE, FRS, 1831 - 1879), односно сетом парцијалних диференцијалних једначина које описују како настају електрична и магнетна поља која се крећу брзином светlosti (c) а која потичу од наелектрисаних честица које се крећу са коначним убрзањем. Максвелове једначине су заправо скуп закона из области електромагнетизма. **Прва Максвелова једначина** је Гаусов (нем. Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855) закон за електрична поља:

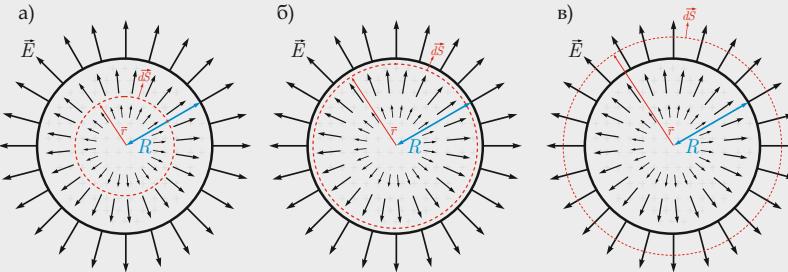
$$\Phi_E = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

где је приказан интегрални облик који може да се тумачи на следећи начин: укупан флукс (Φ_E) електричног поља (\vec{E}) кроз замишљену затворену површину (S) је једнак количнику укупног наелектрисања (Q) ограниченог том површином и диелектричне константе вакуума (ϵ_0).

Задатак 2.21. Пронађи израз за електрично поље које потиче од униформно наелектрисане сфере полупречника R количином наелектрисања Q . Електрично поље представити као функцију r , расстојања од центра униформно наелектрисане сфере.

Решење:

Како би се пронашла зависност $E(r)$ неопходно је применити Гаусов закон, тј. једначину 2.16. Најлакши пут је да се произвољно одабрана површина S одабере тако да представља површину сфере полупречника r , где r уједно представља текућу променљиву у односу на коју ће се интензитет електричног поља представљати.



На слици су приказана три случаја а), б) и в) у којима се мења површина S , односно повећава вредност вектора \vec{r} . Векторско поље електричног поља \vec{E} је приказано црним стрелицама, док је елемент површине S нормалан на површину и означен са $d\vec{S}$. Сада се може применити Гаусов закон како би се дошло до зависности $E(r)$:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

С обзиром да електрично поље у овом случају има сферну симетрију, баш као и „произвољно” одабрана површина S , то значи да су вектори електричног поља и елемента површине $d\vec{S}$ колинеарни у свакој тачки и за свако r . У том случају се може писати:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E dS = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

и како је електрично поље константно на површини сваке сфере са полупречником r , лако се добија:

$$E \cdot \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q(r)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \quad (3.1)$$

Сада треба наћи зависност $Q(r)$, али с обзиром да је сфера униформно наелектрисана. То је лако:

$$\frac{Q(r)}{\text{Укупно наелектрисање}} = \frac{V(r)}{\text{Укупна запремина}}$$

$$\frac{Q(r)}{Q} = \frac{\frac{4}{3}r^3 \pi}{\frac{4}{3}R^3 \pi}$$

$$Q(r) = Q \frac{r^3}{R^3}$$

комбиновањем ове једначине са 3.1, добија се:

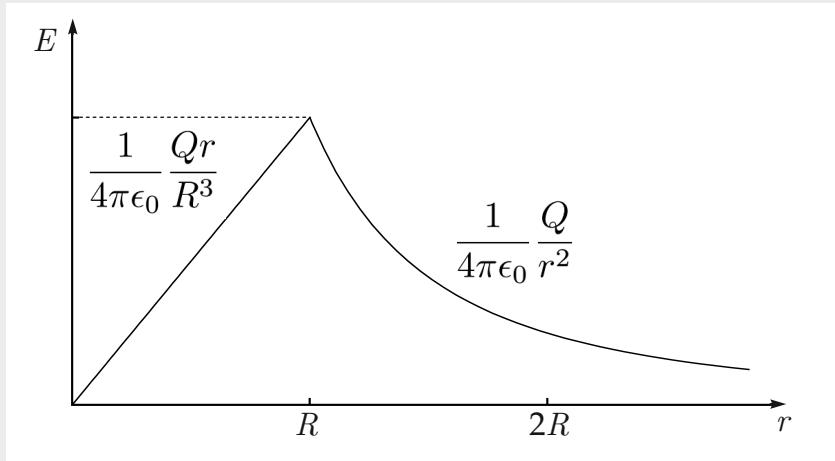
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{R^3} \quad (3.2)$$

Овај резултат одговара ситуацији да докле год је сферна површина S унутар унiformно наелектрисане сфере полупречника R , дакле када је $r \leq R$ (случајеви а) и б) са слике). У случају када је $r > R$ (случај в) са слике) количина наелектрисања обухваћена површином S је иста и једнака укупном наелектрисању унiformно наелектрисане сфере Q , без обзира на то колика је површина S , односно колико је повећана вредност r . У том случају, у једначину 3.1 се може ставити $Q(r) = Q$, па следи:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (3.3)$$

Добијен резултат подсећа на електрично поље тачкастог наелектрисања које се може добити из Кулоновог закона (једначина 2.6). Овим примером је и доказано да је, у простору изван сферносиметрично распоређеног наелектрисања, јачина електричног поља иста као да је сво наелектрисање сконцентрисано у центру око ког је наелектрисање распоређено.

Зависности 3.2 и 3.3 су приказане на следећем графику:



Урадити исти пример, али када је сво наелектрисање унiformно распоређено на површини сфере, као што би то био случај да је у питању метална кугла. Како ће у том случају изгледати зависност $E(r)$?

Друга Максвелова једначина је Гаусов закон за магнетизам који има следећи интегрални облик:

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.17)$$

и математички подсећа на Гаусов закон за електрично поље али са великом суштинском разликом - укупан флукс (Φ_B) магнетног поља (E) кроз замишљену затворену површину (S) је једнак нули. Овај закон суптилно указује на то да нешто попут „магнетних наелектрисања“ не постоји, односно да магнетни монополи не могу постојати те да је основни ентитет који је заслужан за појаву магнетизма **магнетни дипол**.³⁰

Трећа Максвелова једначина је познатија као Максвел-Фарадејева (енгл. Michael Faraday FRS, 1791 - 1867) једначина, односно Фарадејев закон електромагнетне индукције:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \varepsilon \quad (2.18)$$

који тврди да ће свака промена у магнетном флуксу (Φ_B) у току времена кроз затворену струјну контуру (l , односно њом дефинисану површину S) индуковати електромоторну силу (ε). Знак „–“ у једначини 2.18 указује да електромоторна сила индукује електричну струју која ствара магнетно поље усмерено супротно од магнетног поља које је узрокник електромоторне сile.³¹

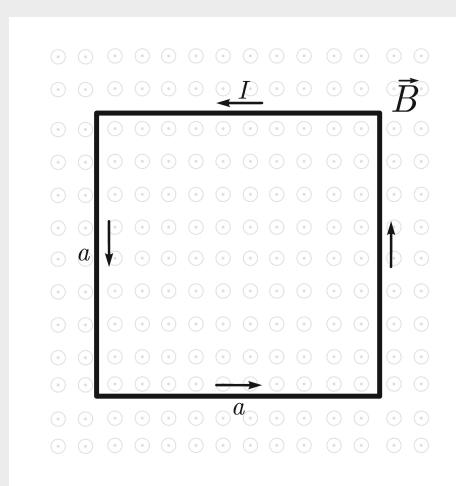
Задатак 2.22. Магнетно поље је \vec{B} усмерено према равни жице које је обликована у облику квадрата странице $a = 10$ см као што је приказано на слици. Извор магнетног поља је перманентни магнет који се удаљава од жице па му се стога јачина магнетног поља кроз површину оивичену жицом смањује у току времена:

$$|\vec{B}| = 2,0 \text{ T } e^{-t/5,0 \text{ s}}$$

Удаљавањем магнета од жице се не мења облик линија сила магнетног поља у непосредној околини жице, већ само интензитет магнетног поља. Понахи како се струја генерисана у жици мења са временом ако је отпор жице једнак 5Ω .

³⁰Ово не значи да не постоје електрични диполи, мултиполи.

³¹Из средње школе познатије као Ленцово (рус. Эмилий Христианович Ленц, 1804 - 1865) правило.

**Решење:**

Овај проблем се лако решава коришћењем једначине 2.18 и имајући у виду да су \vec{B} и $d\vec{S}$ колинеарни, као и то да је $S = a^2$:

$$-\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} [a^2 B] = -\frac{d}{dt} [a^2 2,0 \text{ T } e^{-t/5,0 \text{ s}}] = \varepsilon$$

Како је $I = \varepsilon/R$, следи:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\varepsilon(t)}{R} = -\frac{d}{dt} \left[\frac{(0,1 \text{ m})^2 \cdot 2,0 \text{ T}}{5 \Omega} e^{-t/5,0 \text{ s}} \right] \\ &= +\frac{(0,1 \text{ m})^2 \cdot 2,0 \text{ T}}{5 \Omega \cdot 5,0 \text{ s}} e^{-t/5,0 \text{ s}} \end{aligned}$$

Јединице са десне стране горње једначине у СИ систему су једнаке јединици ампер (показати), па се коначно добија:

$$I(t) = 0,8 \text{ mA } e^{-t/5,0 \text{ s}}$$

Дакле, струја у проводнику експоненцијално опада па ће након нпр. 25 s бити $\approx 5 \mu\text{A}$.

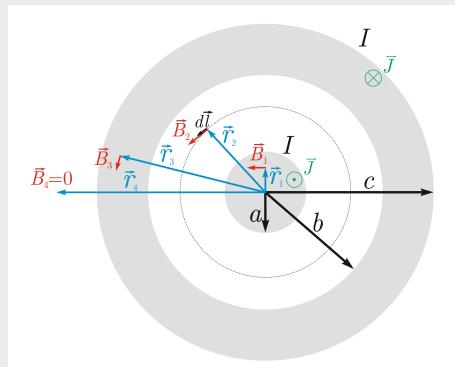
Четврта Максвелова једначина или Ампер-Максвелова (André-Marie Ampère, 1775 - 1836) једначина је проширен Амперов закон који разматра укупне струје у проводнику уместо слободних/кондукционих струја:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.19)$$

За слободне струје у проводницима се сматрају конвенционалне струје условљене усмереним протоком слободног наелектрисања (електрона). Укупна густина струје у једначини 2.19 има доприносе од слободне/кондукционе

струје, струје магнетизације и поларизационе струје. Струја магнетизације је струја која је потребна да се флукс магнетног поља „пробије” кроз материјал и суштински постоји због коначне вредности магнетне пермеабилности (μ_0). Поларизационе струје настаје услед промене индукованих електричних диполних момената у материјалу с временом. Струја магнетизације и поларизационе струје увек имају мање доприносе у односу на слободну/кондукциону струју. Амперов закон тврди да је густина линија сила око проводника пропорционална јачини електричне струје (густине струје \vec{J}) која кроз тај проводник пролази и ствара исто то магнетно поље. Максвелово проширење се огледа у две ствари: (1) укупној струји су додати доприноси од магнетизације и поларизације; (2) додат је други члан подинтегралне функције са десне стране једначине 2.19 који представља неки вид закона одржања наелектрисања с обзиром да се усмереним кретањем наелектрисања (струјом) губи одређени део наелектрисања у јединици запремине.

Задатак 2.23. Кроз бесконачно дугачак проводник коаксијално смештен унутар прстенастог проводника протиче струја јачине I . Кроз прстенасти проводник такође протиче струја јачине I , али у супротном смеру. Занемарити доприносе од струје магнетизације и поларизационе струје. Попречни пресек оваквих проводника и њихов међусобни однос је дат на слици.



Понахи јачине магнетног поља унутар унутрашњег проводника, у региону између проводника, унутар спољашњег прстенастог проводника и ван прстенастог проводника (ван система). Сматрати да је густина струје кроз оба проводника унiformна.

Решење:

Како је густина струје унутар оба проводника унiformна онда се може писати:

$$J_{\text{уhy.}} = \frac{I}{a^2 \pi} \quad J_{\text{сpo.}} = \frac{I}{(c^2 - b^2) \pi}$$

Једначина 2.19 за потребе овог задатка узима облик:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (3.4)$$

У првом случају $0 < r < a$, једначина 3.4 се може записати као:

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_S \vec{J}_{\text{yhy.}} \cdot d\vec{S}$$

а како су вектори \vec{B} и $d\vec{l}$, као и \vec{J} и $d\vec{S}$ колинеарни, онда се може писати:

$$\begin{aligned} B \oint_l dl &= \mu_0 J_{\text{yhy.}} \iint_S dS = \mu_0 J_{\text{yhy.}} \int_0^r r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ B 2r\pi &= \mu_0 J_{\text{yhy.}} r^2 \pi = \frac{\mu_0 I r^2 \pi}{a^2 \pi} \\ \text{за } 0 < r < a \Rightarrow B &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \end{aligned}$$

У случају када је $a < r < b$, интегралом са десне стране једначине 3.4 је обухваћена густина струје читавог унутрашњег проводника, па се може писати:

$$\begin{aligned} B \oint_l dl &= \mu_0 J_{\text{yhy.}} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \\ B 2r\pi &= \mu_0 I \\ \text{за } a < r < b \Rightarrow B &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned}$$

Запажа се да спољашни проводник не утиче на магнетну индукцију у региону $a < r < b$ јер интегралом са леве стране једначине 3.4 није обухваћен ни један део тог проводника.

У случају када важи $b < r < c$ магнетна поља унутрашњег и спољашњег проводника се поништавају идући од b ка c , достижући вредност нула када је $r \geq c$, с обзиром да је речено да су смерови струје у унутрашњем и спољашњем проводнику супротни. Онда се једначина 3.4 може записати као:

$$\begin{aligned} \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \iint_S (\vec{J}_{\text{yhy.}} - \vec{J}_{\text{cpo.}}) \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \left[\iint_S \vec{J}_{\text{yhy.}} \cdot d\vec{S} - \iint_S \vec{J}_{\text{cpo.}} \cdot d\vec{S} \right] \end{aligned}$$

и даљим сређивањем се долази до:

$$\begin{aligned} B \oint_l dl &= \mu_0 \left[J_{\text{yhy.}} \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\varphi - J_{\text{cpo.}} \int_b^r r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \right] \\ &= \mu_0 \left[I - \frac{I}{(c^2 - b^2)\pi} (r^2 - b^2)\pi \right] \\ &= \mu_0 I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$B2r\pi = \mu_0 I \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$\text{за } b < r < c \Rightarrow B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(c^2 - r^2)}{r(c^2 - b^2)}$$

У последњем случају када је $r \geq c$ десна страна последње једначине постаје нула, дакле:

$$\text{за } r \geq c \Rightarrow B = 0$$

Оваква конструкција проводника је пример конструкције која се користи у коаксијалним кабловима као вид преносног вода за сигнале.

Сврха задатака 2.21, 2.22 и 2.23 је да се Максвелове једначине повежу са физичким законима који се изучавају у оквиру електромагнетизма у многим смеровима средњих школа.

Комбиновањем Максвелових једначина се долази до описа флуктуација електромагнетних таласа у току времена далеко ван извора поремећаја. Јачине електричног и магнетног поља, далеко од извора поремећаја, задовољавају диференцијалну једначину другог реда:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

која се назива **таласна једначина**. Φ у једначини може бити јачина и електричног и магнетног поља. Свака функција која задовољава ову диференцијалну једначину представља могући талас у посматраном медијуму.³² Ова диференцијална једначина је практично идентична једначини 2.9 која је написана за таласе у општем случају. Како електрично и магнетно поље електромагнетних таласа задовољавају диференцијалну једначину истог облика, то значи да се исто понашају у времену и простору.

³²Брзина кретања таласа с дефинише о каквом се медијуму ради с обзиром да је: $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$.

3 | Развој квантне теорије

Крајем 19. века, *физика* је била довољно развијена како би могла да се носи са комплексним проблемима у оквиру класичне механике, укључујући и макроскопске системе. *Термодинамика, кинетичка теорија и механика* су већ добро били развијени чиме сведочи да су већ крајем 18. века били конструисани први мотори са унутрашњим сагоревањем. Феномени у оквиру *оптике* су увек објашњавани помоћу концепта електромагнетних таласа. Ипак, почетком 20. века „*класичне*“ теорије¹ наилазе на озбиљне проблеме приликом објашњавања спектра зрачења апсолутно црног тела, фотоелектричног ефекта, Комптоновог ефекта и стабилности атома у основном (електронском) стању. Једна група истакнутих научника тог времена је веровала да одговор лежи у модификацији (или неком виду уопштавања) Максвелових једначина које заједно са Лоренцовим законом (једначина 2.7) чини основу (классичног) електромагнетизма, (классичне) оптике и основних законитости електричних струја. Развој квантне теорије је узео замах онда када су се исцрпеле могућности проширења/уопштавања класичних теорија и када се створила потреба за потпуно новим идејама. Почетак 20. века се означава као прекретница у развоју модерне физике, првенствено навођена развојем квантне теорије.

Са данашње тачке гледишта, класична физика пружа потпуно одвојен опис честица и таласа. **Честиčни модел** у физици подразумева да се свакој честици у простору може придржити добро дефинисана путања која се може предвидети у сваком тренутку у будућности (детерминизам) и прошлости (реверзибилност) уколико се знају почетни услови (почетни положај и брзина/импулси) и силе које делују на честицу. Дакле, познавање стања једног класичног система подразумева да се познаје положај (\vec{r}) и импулс (\vec{p}) сваке честице која чини посматрани систем.² Међутим, како би се дошло до еволуције стања система у времену неопходно је познавати и основни динамички закон кретања, у свом првобитном облику формулисан уз помоћ другог Њутновог закона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3.1)^3$$

¹Данас познате као „*класичне*“. Тада су научницима то биле једине развијене и општеприхваћене теорије.

²Скуп $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\}$ за систем од n честица је познат као **фазни простор**. Више о овоме на предмету „Статистичка термодинамика“ (*Термодинамика?*).

а касније реформулисан у апстрактним формама познатим као Лагранжова (ита. Giuseppe Luigi Lagrangia, 1736 - 1813) и Хамитонова (Sir William Rowan Hamilton LL.D, DCL, MRIA, FRAS, 1805 - 1865) механика.

С друге стране, квантна физика/механика подразумева да се честице третирају **и као таласи** кроз концепт таласно-честичне дуалности. Овакав третман таласа и честица омогућава адекватан опис експеримената који су били нејасни класичној теорији. Таласно-честична дуалност је од централног значаја за квантну теорију заједно са принципом (квантне) суперпозиције, принципом неодређености и квантним уплитањем (енгл. entanglement). Принцип суперпозиције је принцип који се примењује на квантне објекте описане таласом са комплексном амплитудом и суштински је већ илустрован на примеру механичких таласа (са реалном амплитудом) у задацима [2.18](#) и [2.20](#). Принцип неодређености је математички концепт који се јавља у виду компромиса због дуалног начина гледања на ствари и уводи одређена ограничења по питању информација које можемо симултрано знати о једном квантном објекту. Квантно уплитање је феномен када два или више квантна објекта можемо посматрати као јединствен систем, ма колико они били просторно раздвојени, односно познавајући информације о једном објекту симултрано знамо информације и о другом објекту са којим је први „уплетен“. Битно је напоменути и пробабилистичку природу квантне механике која је контрадикторна детерминистичком погледу који произиђе из класичне механике. Дакле, неки квантни објекат се може описати са више могућих стања симултрано. Међутим, не може се знати у ком стању се систем заиста налази док се не изврши мерење над тим системом. Међутим, да би се мерење над неким квантним системом извршило, неопходно је имати интеркцију система са мерним инструментом. У том случају, у тренутку мерења, квантни систем и мерни инструмент постају један систем па остаје питање: „Шта се заправо мери?“. У наставку ће хронолошки бити изложени најважнији експерименти и теоријска објашњења која су значајно допринели убрзаном развоју квантне теорије у 20. веку.

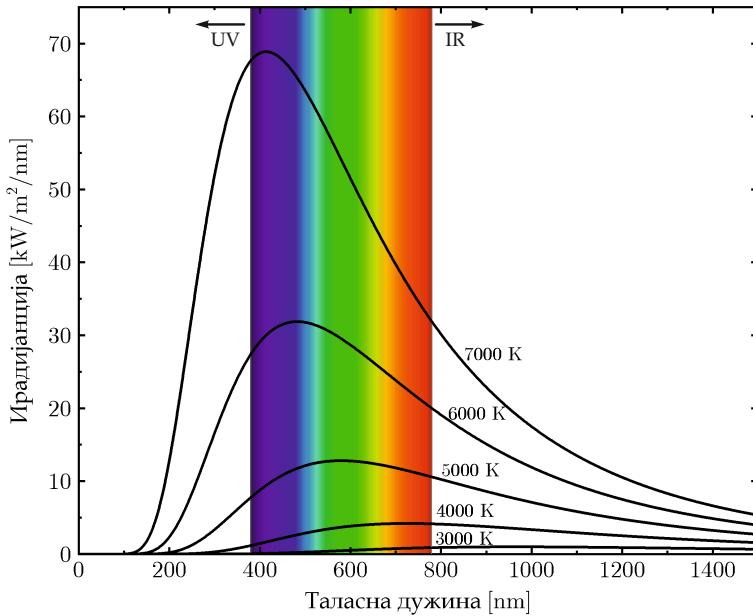
3.1. ПЛАНКОВ ЗАКОН ЗРАЧЕЊА АПСОЛУТНО ЦРНОГ ТЕЛА (1900.)

Крајем 19. века, физичари су били немоћни да пруже класичну теорију која би могла да објасни спектар електромагнетног зрачења које потиче од апсолутно црног тела (енгл. black-body radiation). Појам апсолутно црног тела је апроксимација⁴ уведена да опише материју која апсорбује своје електромагнетно зрачење (свих таласних дужина) које падне на њу. Када се апсолутно црно тело загреје на коначну температуру, оно емитује електромагнетно зрачење са карактеристичном расподелом фреквенција/таласних дужина која зависи од температуре. Планк (нем. Max Karl Ernst Ludwig

³У средњој школи углавном разматран у облику: $\vec{F} = m\vec{a}$.

⁴Нешто попут апсолутно црног тела у реалности не постоји. Дакле, ради се о идеализацији попут модела идеалног гаса или Ван дер Валсовог (Johannes Diderik van der Waals, 1837 - 1923) флуида.

Слика 3.1. Спектрална ирадијација апсолутно црног тела загрејаног на различите температуре.



Planck FRS, 1858 - 1947) је први дошао до математичког израза који адекватно описује расподелу енергије израчуне од стране апсолутно црног тела у виду електромагнетног зрачења. Планк је увео претпоставку да се апсолутно црно тело на атомском нивоу може посматрати као да је сачињено од хармонијских осцилатора чија се енергија може мењати искључиво дискретно, односно апсорбовати или емитовати као целобројни (n) умножак најмање количине енергије коју са собом носи електромагнетно зрачење:

$$\Delta E = nE_0 = nh\nu = n\frac{hc}{\lambda} \quad (3.2)$$

Најмања количина енергије (квант) је пропорционална (пропорционалан) фреквенцији зрачења са константом пропорционалности која је означенa са h , која се зове Планкова константа и износи $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J·s. Планкова константа представља најмање дејство које постоји у природи и због своје изузетно мале вредности се не појављује у једначинама у оквиру класичне физике. На основу ове претпоставке Планк је дошао до израза за расподелу израчуне енергије у јединици времена по јединици површине и јединичној таласној дужини:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} \quad (3.3)$$

Величина са леве стране једначине 3.3 се назива спектрална ирадијација а сама једначина може узети више различитих облика. Расподела

спектралне ирадијанције апсолутно црног тела за различите температуре је приказана на слици 3.1.

Дакле, ако се неко апсолутно црно тело загреје на ≈ 3500 K, оно ће највише израчивати електромагнетне таласе које људско око перципира као црвени бој.⁵ Са оваквим тумачењем спектралне расподеле апсолутно црног тела Планк уводи револуцију у физици и отвара низ нових могућности, те се стога сматра да је са овим открићем почeo развој модерне физике и постављен темељ за развој квантне теорије.

Задатак 3.1. Израчунати енергију (у eV) фотона који има:

- а) фреквенцију од 400 THz
- б) таласну дужину од $5 \mu\text{m}$

Којим спектроскопским спектралним областима припадају ови фотони?

Решење:

Коришћењем једначине 3.2 се долази до енергија фотона:

- а) 1,654 eV - видљиво електромагнетно зрачење
- б) 0,248 eV - инфрацрвено електромагнетно зрачење

Задатак 3.2. Израчунати ирадијанцију (у јединицама $\text{W}\text{W}/\text{m}^2$) коју израчи апсолутно црно тело на температури од 7000 K у спектралном опсегу од 600 до 700 nm.

Решење:

Применом једначине 3.2 се може написати:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{\partial u_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}(\lambda, T)}{\partial \lambda}$$

односно,

$$u_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}(\lambda, T) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1} d\lambda$$

где су $\lambda_1 = 600 \text{ nm}$ и $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$. Дакле, потребно је решити интеграл у горњој једначини. Друга варијанта би била да се начини апроксимација, односно да се подинтегрална функција има константни нагиб у опсегу од 600 до 700 nm на температури од 7000 K (погледати слику 3.1). Тада се може писати:

$$u_{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2}(\lambda_{sr}, T) = \frac{2hc^2}{\lambda_{sr}^5} \frac{1}{e^{hc/kT\lambda_{sr}} - 1} \Delta\lambda$$

где су $\lambda_{sr} = (\lambda_2 + \lambda_1)/2$ и $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$. Коначно, решење је:

⁵Можда у том случају назив „апсолутно црно тело” и није прикладан.

$$u_{600 \text{ nm} \rightarrow 700 \text{ nm}}(650 \text{ nm}, 7000 \text{ K}) = 4,537785 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \approx 4,54 \frac{\text{MW}}{\text{m}^2}$$

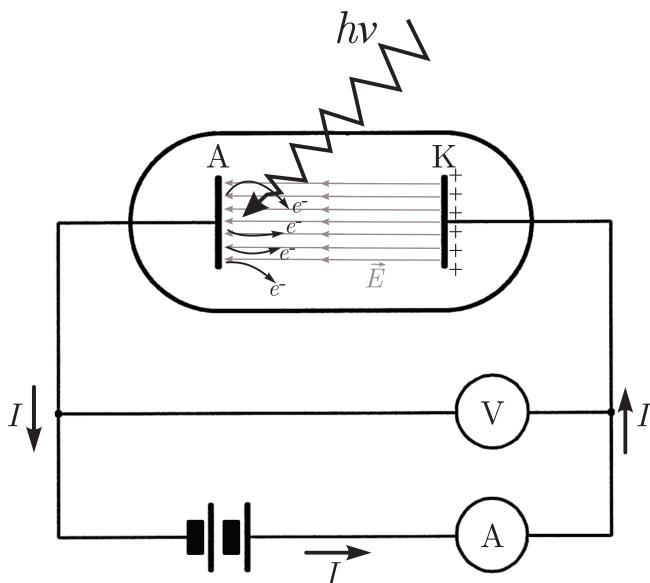
Колико кваната израчи куглица запремине 10 cm^3 на истој температури у периоду од једне секунде?

3.2. ФОТОЕЛЕКТРИЧНИ ЕФЕКАТ - АЈНШТАЈНОВО ТУМАЧЕЊЕ (1905.)

Фотоелектрични ефекат је појава емисије електрона из материјала под утицајем електромагнетног зрачења. Овако настали слободни електрони се називају **фотоелектрони**. Разне облике фотоэффекта су забележили многи значајни научници у 19. веку док је резултате свој истраживања везаног за овај феномен први публиковао Херц (нем. Heinrich Rudolf Hertz, 1857-1894) крајем 19. века. На преласку између 19. и 20. века Халваш (нем. Wilhelm Ludwig Franz Hallwachs, 1859-1922) и Ленард (нем. Philipp Eduard Anton von Lenard, 1862-1947) су извели низ експеримента везаних за овај феномен а који су касније омогућили да се он теоријски може објаснити. Уз помоћ експерименталне поставке које је приказана на слици 3.2 до-несено је неколико закључака који су пркосили класичном електромагнетизму. Наиме, (1) интензитет фотострује зависи од интензитета светlostи која пада на површину материјала \Rightarrow више фотона значи и више фотоелектрона; (2) при константној фреквенцији светlostи, постоји минимална вредност напона (између аноде и катоде) при којој ће доћи до детекције фотоелектрона и ово притом не зависи од интензитета светlostи \Rightarrow сви „избјени“ фотоелектрони имају тачно исти вишак кинетичне енергије, односно фотоструја зависи само од фреквенције; (3) сваки материјал има карактеристичну (граничу) фреквенцију светlostи која је потребна да до фотоэффекта уопште и дође \Rightarrow електрони се налазе у везаном стању које не могу напустити ако им се не саопшти довољно енергије. Класични електромагнетизам би предвидео да је континуално електромагнетно зрачење способно да у континуитету преноси енергију електронима у материјалу, те да би они могли да акумулирају енергију у виду принудних осцилација. То значи да би фотоелектрони могли бити „избачени“ из материјала и са „закашњењем“ уз помоћ светlostи било које фреквенције и било ког интензитета.

Исправно тумачење фотоэффекта је дао Ајнштајн 1905. године инспирисан Планковим законом зрачења апсолутно црног тела. Ајнштајн се водио Планковом квантном хипотезом, односно идејом да је спон светlostи сачињен од дискретних пакета енергије које је касније Луис (енгл. Gilbert Newton Lewis, FRS, 1875-1946) назвао **фотони**, и који имају енергију која је тачно одређена фреквенцијом зрачења - $h\nu$. Ови фотони играју улогу елементарног хармонијског осцилатора који се спомиње у теорији о зрачењу апсолутно црног тела (погледати претходно поглавље). Управо фо-

Слика 3.2. Упрощена шема апаратуре за истраживање фотоефекта коју је користион Ленард. Фотони ($h\nu$) падају на аноду (A) која је сачињена од погодног материјала и том приликом стварају („избацују“ из материјала) фотолеектроне. Ови фотолеектрони бивају привучени ка катоди (K) посредством електричног поља (\vec{E}) које настаје услед разлике потенцијала између аноде и катоде која се региструје уз помоћ волтметра (V). Докле год светлост обасјава аноду и докле год је електрично поље између аноде и катоде довољно јако, са амперметром (A) је могуће регистровати струју која потиче од фотолеектрона, тзв. фотострују.



тони појединачно интереагују са електронима у материјалу и преносе им енергију тако да уколико је имају довољно, изводе електрон из везаног стања. Ако имају више него довољно енергије, остатак иде на повећање кинетичке енергије слободног („избаченог“) електрона. Ово се може сумирати у једначини:

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A_i \quad (3.4)$$

где први члан са десне стране једначине представља кинетичну енергију електрона а други члан излазни рад материјала, A_i односно енергију потребну да се електрон „извуче“ из везаног стања⁶.

Осим тога што представља полазну тачку за одређивање Планкове кон-

⁶Ово се односи на минималну енергију (термодинамички рад) коју (који) је потребно уложити како би се електрон извукao из унутрашњости материјала на површину. Под површином се сматра такав крајњи положај електрона у вакууму довољно далеко од површине да електрон не осећа непосредну интеракцију са атомима површине, али да осећа макроскопска електрична и/или магнетна поља која потичу од самог материјала.

станте⁷, фотоелектрични ефекат налази примену у уређајима код којих је неопходно детектовати светлост слабог интензитета - фотомултипликаторима. Такође, постоји и читава класа спектроскопских метода која се заснива на фотоелектричном ефекту - фотоелектронска спектроскопија.

Задатак 3.3. Одредити брзину фотоелектрона емитованих из материјала чији је излазни рад 5,6 eV а који обасјава UV зрачење таласне дужине од 200 nm. Одредити максималну таласну дужину (првену границу) која може да изазове фотоенекат у овом материјалу.

Решење:

Користећи једначину 3.4 може се доћи до брзине фотоелектрона емитованог из материјала:

$$v = \sqrt{\frac{2(h\nu - A_i)}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A_i\right)}{m}}$$

$$v = 459108 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 459,1 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Такође, ако се за брзину у једначини 3.4 стави нула, добија се првена граница фотоенеката:

$$\lambda_{max} = \frac{hc}{A_i} = 221,4 \text{ nm}$$

Задатак 3.4. Колики је најмањи напон (закочни напон) неопходно применити у апаратури на слици 3.2 како би дошло до прекида фотострује приликом обасјавања материјала UV зрачењем таласне дужине од 180 nm? Излазни рад материјала је 6,2 eV.

Решење:

У случају прекида фотострује сва кинетичка енергија фотоелектрона прелази у потенцијалну па се други члан у једначини 3.4 може заменити са eU , те се добија:

$$h\nu = eU + A_i$$

$$U = \frac{1}{e} \left(\frac{hc}{\lambda} - A_i \right) = 0,688 \text{ V}$$

Израчунати закочни напон и у претходном задатку.

⁷Вежба оквиру предмета „Аомистика”.

3.3. БОРОВ МОДЕЛ АТОМА (1913.)

Још пре развоја квантне теорије, експерименталне чињенице проистекле из посматрања електромагнетних спектара атома су научнике тог времена довеле до битних закључака. Детектовани спектри су били **линијски** и било је могуће установити одређене правилности између растојања линија у таквим спектрима, а пре свега у спектрима водониковог атома. Линијски спектри, за разлику од континуалних, се манифестишу као линије уских, али коначних, профила у односу на спектралну осу која представља енергију. Правилности између растојања линија у спектру атома водоника су уочене још у 19. веку. Ове правилности су назване спектралне серије атома водоника и могу се сумирати Ридберговом (шве. Johannes Robert Rydberg, 1854-1919) формулом:

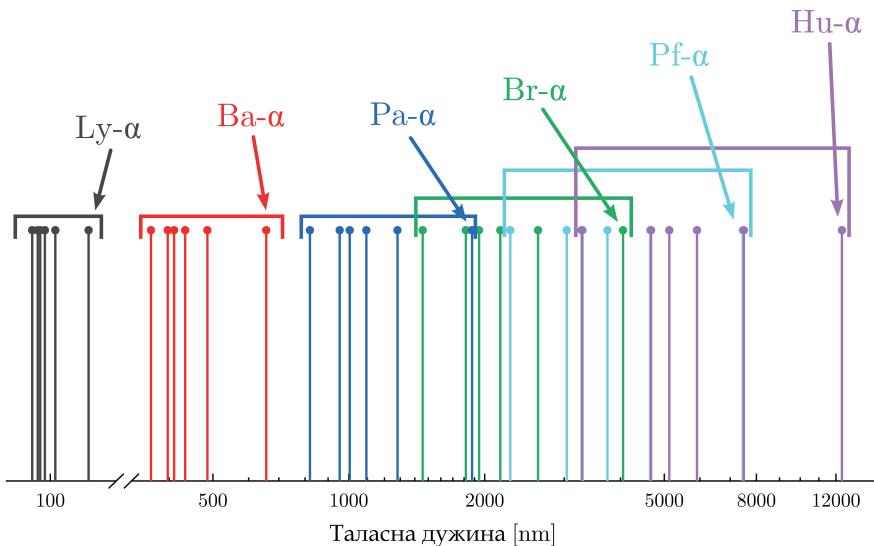
$$\tilde{\nu} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right) \quad (3.5)$$

где су R Ридбергова константа која износи $109677,576 \text{ cm}^{-1}$ а n и k су произвольни цели бројеви за које важи $n < k$. Поменуте спектралне серије се могу извести из ове формуле тако што се у Ридберговој формулама стављају одређене вредности бројева n и k . Спектралне серије атома водоника су илустроване на слици 3.3. Ове спектралне серије су добиле назив по научницима који су их први детектовали и то: Лайманова (енгл. Theodore Lyman IV, 1874-1954), Балмерова (нем. Johann Jakob Balmer, 1825-1898), Пашенова (нем. Louis Carl Heinrich Friedrich Paschen, 1865-1947), Брекетова (енгл. Frederick Sumner Brackett, 1896-1988), Пфундова (енгл. August Herman Pfund, 1879-1949) и Хамфријева (енгл. Curtis Judson Humphreys, 1898-1986) серија. Скраћени записи за линије у свакој од серија су: Ly, Ba, Pa, Br, Pf, Hu, редом. У свакој појединачној серији, линије се обележавају словима грчког алфабета ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$) идући од веће ка мањој таласној дужини. Из Ридбергове формуле се до спектралних серија редом долази тако што се за n у једначини ставе бројеви 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 и k се мења тако да важи $n < k$. Прве четири линије Балмерове серије припадају видљивом делу електромагнетног спектра: Ba- $\alpha_{n=2,k=3} \approx 656,3 \text{ nm}$ (црвена), Ba- $\beta_{n=2,k=4} \approx 486,1 \text{ nm}$ (зелено-плава), Ba- $\gamma_{n=2,k=5} \approx 434,0 \text{ nm}$ (плава), Ba- $\delta_{n=2,k=6} \approx 410,2 \text{ nm}$ (љубичаста).⁸ Лайманова серија се налази у UV док се Пашенова серија налази у IR делу електромагнетног спектра.

Експериментална опажања спектралних серија, заједно са Планковом хипотезом (једначина 3.2) и Радерфордовим моделом атома (поглавље 2.1) су помогли да се пронађе модел атома који превазилази недостатке инхерентне Радерфордовом моделу када се он покуша описати класичном електродинамиком. Наиме, код нуклеарног модела атома целокупно позитивно наелектрисање је сконцептрисано у језгру атома, док се електрони око њега, који атом чине електронеутралним морају кретати како не би били привучени у само језгро. Радерфорд је под електронским кретањем подразумевао кретање електрона око језгра слично кретању планета око

⁸Назначене су експериментално измерене вредности.

Слика 3.3. Спектралне серије атома водоника. Таласна дужина је приказана на логаритамској скали. Различитим бојама су означене различите спектралне серије. Такође су назначене и α линије у свакој серији, односно најдуготаласније линије у свакој серији.



Сунца (или Месеца око Земље). Међутим, како је такво периодично кружно кретање електрона око језгра убрзано, то значи да би према законима класичне електродинамике електрони требали да емитују електромагнетно зрачење. Такође, ако тако кружећи електрони емитују електромагнетно зрачење то значи и да губе енергију, те би се константно приближавали атомском језгром некаквом спиралном путањом и у једном моменту „пали” у само језгро. Овакви закључци указују да би атом описан на овај начин био нестабилан и да би му време живота било реда величине 10 ps. Додатно, приликом „пада” електрона спиралном путањом према језгру фреквенција емитованог електромагнетног зрачења би се мењала, па би то значило да атом емитује континуални електромагнетни спектар.⁹ Ништа од овога није експериментално опажено. Како би се превазишли поменути проблеми, Нилс Бор (дан. Niels Henrik David Bohr H.E., 1885-1962) је предложио следеће постулате који дефинишу његов модел:

- 1) Кулонова сила игра улогу центрипеталне сile приликом кружног кретања електрона око језгра \Rightarrow доминантне електростатичке интеракције и планетарни модел.
- 2) Електрони могу да круже око језгра **само** оним орбитама код којих је угаони момент једнак целобројном умношку редуковане Планкове

⁹Наводимо без доказа.

константе.¹⁰ Ове орбите дефинишу енергетске нивоје у оваквом атому.
⇒ Квантација угаоног момента и енергетских нивоја.

- 3) Електрон који се нађе у овако дефинисаној (стабилној) орбити не зрачи електромагнетно зрачење ⇒ одбацање закона класичне електродинамике.
- 4) Емисија или апсорција електромагнетног зрачења од стране атома (електрона) се дешава само када електрон прелази из једне у другу стабилну орбиту ⇒ веза са Планковом теоријом зрачења, тј. квантном хипотезом.

Борови постулати могу бити сумирани са следећим једначинама:

- 1) Укупна енергија је дата збиром кинетичке и потенцијалне енергије и износи:

$$E = T + U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \quad (3.6)$$

Негативан предзнак указује да се систем налази у везаном стању.

- 2) Интензитет угаоног момента електрона је једнак:

$$L = mvr = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.7)$$

с обзиром да је \vec{v} периферна брзина електрона чији је вектор нормалан на радијус орбите, вектор \vec{r} , па се може писати: $|\vec{L}| = m|\vec{v} \times \vec{r}| = mvr \sin(\angle(\vec{v}, \vec{r})) = mvr$.

- 3) Дискретна стабилна стања:

$$E_1, E_2, E_3, \dots \quad (3.8)$$

- 4) Боров услов фреквенције:

$$\Delta E = h\nu = hc\tilde{\nu} = E_n - E_k \quad (3.9)$$

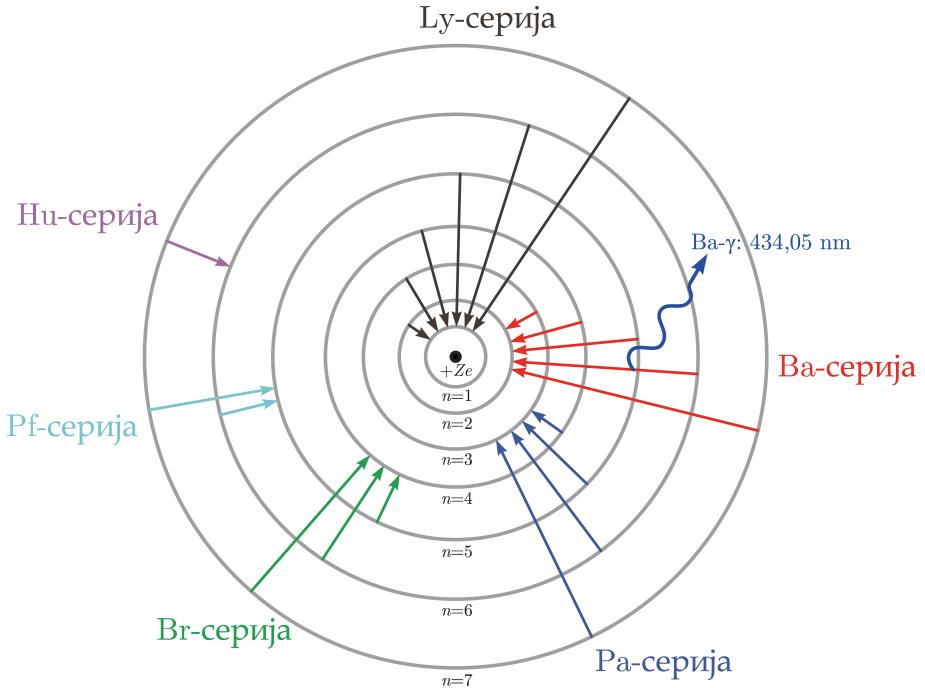
$$\nu = \frac{E_n - E_k}{h} \quad \text{или} \quad \tilde{\nu} = \frac{E_n - E_k}{hc}$$

Борова теорија која проистиче из ових постулата успешно објашњава спектралне серије атома водоника, односно Ридбергову формулу, као и спектре једноелектронских атома. Шематски приказ модела за водоников атом је дат на слици 3.4.

До израза за енергију (једначина 3.6) је могуће доћи на релативно једноставан начин. Ако Кулонова сила игра улогу центрипеталне сile онда

¹⁰Редукована Планкова константа представља количник Планкове константе и 2π и још се назива и Диракова (енгл. Paul Adrien Maurice Dirac OM FRS, 1902-1984) константа. Редукована Планкова константа се уводи из практичних разлога с обзиром да се у многим једначинама у квантној механици појављује израз $h/2\pi$. Да је Планк имао спектроскопске податке у јединицама угаоне фреквенције (ω) уместо линеарне фреквенције (ν), редуковану варијанту Планкове константе данас вероватно не бисмо ни имали.

Слика 3.4. Шематски приказ Боровог модела атома са спектралним серијама са слике 3.3. Назначена је таласна дужина прелаза који одговара Ba- γ линији која се среће у видљивом делу електромагнетног спектра и има плаву боју (434,05 nm).



се за стабилну орбиту она може изједначити са центрифугалном силом у систему:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot e}{r^2} \quad F_{cf} = ma_{cf} = m \frac{v^2}{r} \quad (3.10)$$

где је Z атомски број језгра, тј. број протона, r радијус орбите а v периферна брзина електрона који кружи око језгра. Даље:

$$F_c = F_{cf} \Rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (3.11)$$

и с обзиром да је кинетичка енергија дефинисана као $mv^2/2$ следи:

$$T = \frac{mv^2}{2} = m \frac{v^2}{r} \cdot \frac{r}{2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \quad (3.12)$$

До потенцијалне енергије се долази тако што се израчуна рад потребан да се електрон из бесконачности доведе на растојање r од језгра атома и да том приликом на њега делује само Кулонова сила:

$$U = A = \int_{\infty}^r F_c dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{Ze^2}{r^2} dr = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = -2T \quad (3.13)$$

Сабирањем кинетичке и потенцијалне енергије (једначине 3.12 и 3.13 добија се укупна електрона у стабилној орбити:

$$E = T + U = T - 2T = -T = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{2r} \quad (3.14)$$

што је једнако изразу који описује први Боров постулат (једначина 3.6).

Задатак 3.5. Израчунати радијус прве Борове орбите код атома водоника.

Решење:

Комбинацијом првог и другог Боровог постулата (једначина 3.6 и 3.7) се долази до зависности полуупречника орбите од главног квантног броја:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} \frac{n^2}{Z} = a_0 \frac{n^2}{Z} \quad (3.5)$$

где је a_0 константа изражена преко фундаменталних константи која се назива Боров радијус и износи:

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0,529 \text{ \AA}$$

За атом водоника у основном стању је $Z = 1$ и $n = 1$, па следи:

$$r_1 = a_0 = 0,529 \text{ \AA}$$

Дакле, прва Борова орбита је орбита која кореспондира најмањој вредности квантног броја $n = 1$, односно орбита са најнижом енергијом. Радијус прве Борове орбите се у случају атома водоника је једнак Боровом радијусу. Сада се може доћи до израза у коме укупна енергија из једначине 3.6 зависи од главног квантног броја:

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{Z^2}{n^2} \quad (3.15)$$

Задатак 3.6. Израчунати вредност Ридбергове константе у cm^{-1} и eV .

Решење:

До Ридбергове константе се може доћи комбиновањем једначина 3.15 и 3.9 и поређењем са Ридберговом формулом 3.5:

$$\Delta E = hc\tilde{\nu} = |E_n| - |E_k| = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{Z^2}{n^2} - \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \frac{Z^2}{k^2}$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{hc} \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} Z^2 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$$

Одакле се види да је Ридбергова константа једнака:

$$R_{\infty} = \frac{1}{hc} \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 109\,737,39 \text{ cm}^{-1}$$

$$R_{\infty}^* = hc R_{\infty} = \frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} = 13,6057 \text{ eV}$$

Знак ∞ у супскрипту код Ридбергове константе истиче да је она израчуната под претпоставком да је маса језgra бесконачно већа од масе електрона. Као што ће бити показано у једном од задатака који следе, ово може да проузрокује разлике у вредности Ридбергове константе. Знаком * у суперскрипту означавамо Ридбергову константу у јединицама eV.

Задатак 3.7. Израчунати полупречник и брзину електрона за прву Борову орбиту код:

- a) атома H
- б) јона Li^{2+}
- в) јона Au^{78+}

Решење:

До полупречника орбита се може доћи коришћењем једначине 3.5 а потом и до брзина коришћењем једначине 3.7:

$$\text{а)} Z = 1 \ n = 1 \Rightarrow r_1 = a_0 \quad v_1 = 7,298 \cdot 10^{-3}c$$

$$\text{б)} Z = 3 \ n = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{3}a_0 \quad v_1 = 2,189 \cdot 10^{-2}c$$

$$\text{в)} Z = 79 \ n = 1 \Rightarrow r_1 = \frac{1}{79}a_0 \quad v_1 = 0,577c$$

У последњем случају се види да су за третман електрона у овом (непостојећем) јону злата потребне релативистичке корекције.

Задатак 3.8. Израчунати полупречнике, брзине и енергије електрона за $n = 1, 2$ и 3 код атома водоника.

Решење:

$$r_n = a_0 \frac{n^2}{Z} \quad v_n = \frac{n\hbar}{m_e r_n} \quad E_n = -R_{\infty}^* \frac{Z^2}{n^2}$$

$$Z = 1 \text{ и } n = 1 \Rightarrow r_1 = 0,529 \text{ Å} \quad v_1 = 7,298 \cdot 10^{-3}c \quad E_1 = -13,606 \text{ eV}$$

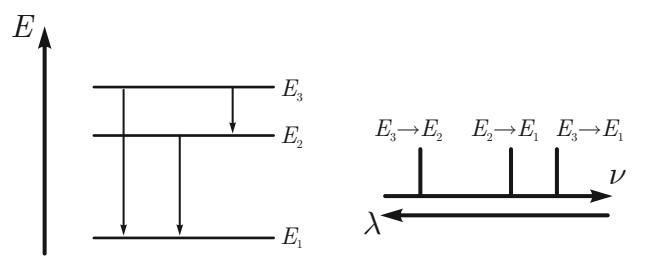
$$Z = 1 \text{ и } n = 2 \Rightarrow r_1 = 2,116 \text{ Å} \quad v_1 = 1,460 \cdot 10^{-2}c \quad E_1 = -3,402 \text{ eV}$$

$$Z = 1 \text{ и } n = 3 \Rightarrow r_1 = 4,761 \text{ Å} \quad v_1 = 2,189 \cdot 10^{-2}c \quad E_1 = -1,512 \text{ eV}$$

Задатак 3.9. Скицирати енергетске нивое из претходног задатка и приказати могуће прелазе при емисији. Организовати могуће прелазе по фреквенцијама и таласним дужинама.

Решење:

Све се може сумирати на дијаграму:



Наравно, како је ово само скица, пропорције на енергетским осама нису одговарајуће.

Задатак 3.10. Израчунати таласне дужине La- α и Ba- α линије за:

- а) атом Н
- б) атом ${}^3_1\text{H}$, Т
- в) позитронијум ($e^+ + e^-$)

Решење:

У овом задатку се илуструје утицај масе на Ридбергову константу, односно на положај линија у спектру атома водоника и системима налик на атом водоника. Да би се ефекти узели у обзир у изразу за Ридбергову константу, уместо масе електрона, треба ставити редуковану масу система:

$$R^* = hcR = \frac{\mu e^4}{8h^2\epsilon_0^2}$$

где је редукована маса за честице маса m_1 и m_2 дефинисана као:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

До таласних дужина La- α и Ba- α линије се долази коришћењем једначине 3.5, односно:

$$\begin{aligned} \text{La-}\alpha: n = 1 \text{ и } k = 2 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\text{La-}\alpha}} &= \frac{1}{hc} \left(R^* \frac{1}{1^2} - R^* \frac{1}{2^2} \right) \\ \Rightarrow \lambda_{\text{La-}\alpha} &= \frac{4hc}{3R^*} \end{aligned}$$

$$\text{Ba-}\alpha: n = 2 \text{ и } k = 3 \Rightarrow \frac{1}{\lambda_{Ba-\alpha}} = \frac{1}{hc} \left(R^* \frac{1}{2^2} - R^* \frac{1}{3^2} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{Ba-\alpha} = \frac{36hc}{5R^*}$$

Оно што се разликује код ових система је само редукована маса, односно вредност Ридбергове константе:

a) $\mu = \frac{m_e m_p}{m_e + m_p} = 0,99945568 m_e \Rightarrow R^* = 13,5983 \text{ eV}$

б) $\mu = \frac{m_e(m_p + 2m_n)}{m_e + (m_p + 2m_n)} = 0,99981866 m_e \Rightarrow R^* = 13,6032 \text{ eV}$

в) $\mu = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = 0,5 m_e \Rightarrow R^* = 6,8029 \text{ eV}$

па ће вредности таласних дужина La- α и Ba- α линије бити:

a) $\lambda_{La-\alpha} = 121,568 \text{ nm} \quad \lambda_{Ba-\alpha} = 656,470 \text{ nm}$

б) $\lambda_{La-\alpha} = 121,525 \text{ nm} \quad \lambda_{Ba-\alpha} = 656,233 \text{ nm}$

в) $\lambda_{La-\alpha} = 243,003 \text{ nm} \quad \lambda_{Ba-\alpha} = 131,221 \text{ nm}$

Задатак 3.11. Израчунати енергије јонизације за атоме H и He⁺.

Решење:

Да би се израчунала енергија јонизације, треба претпоставити да се уклоњен електрон налази на бесконачној удељености од језгра па се енергија јонизације у то случају рачуна као:

$$E_J = E_\infty - E_1 = 0 - E_1 = -E_1$$

јер је

$$n = 1 \text{ и } k \rightarrow \infty \Rightarrow E_\infty \rightarrow 0$$

$$E_J = -E_1 = +R_\infty^* \frac{Z^2}{1^2}$$

$$E_J(\text{H}) = 13,6057 \text{ eV} \quad \text{и} \quad E_J(\text{He}^+) = 54,4222 \text{ eV}$$

Стање које одговара великом квантном броју n се назива Ридбергово стање. То је стање које конвергира ка стању које одговара јонизованом атому. Појам Ридбергово стање се користи и код других система који нису атомски.

Задатак 3.12. Сателит масе 10 kg за 2 сата направи пун круг по орбити радијуса 8000 km. Користећи Боров постулат за угаони момент нађи квантни број орбите сателита.

Решење:

Из једначине 3.7 следи:

$$v = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{2r\pi}{T} \Rightarrow n = \frac{(2r\pi)^2 m}{\hbar T}$$

$$n = 5,3 \cdot 10^{45}$$

што практично илуструје да кретање сателита није квантисано.

Иако доста примитиван за данашње схватање, Боров модел је у време када се појавио дао теоријска објашњења за значајне проблеме у физици тог времена. Неки од главних проблема са којима се Боров модел сусрео су:

- објашњење спектара атома тежих од водоника,
- интензитети спектралних линија,
- постојање фине и хиперфине структуре спектралних линија,

као и многи други проблеми који захтевају модерни квантномеханички третман. Одређена унапређења Боровог модела су успевала да допуне модел и успешно опишу неке од недостатака, али никада довољно добро. Најпознатије унапређење Борове теорије је Бор-Зомерфилдова (нем. Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld, 1868-1951) теорија. Више о Боровом моделу и унапређењима на предмету „Атомистика”.

3.4. КОМПТОНОВ ЕФЕКАТ (1922/23.)

$$\lambda' - \lambda = 2 \frac{\hbar}{m_0 c} \sin^2 \frac{\beta}{2} = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (3.16)$$

Задатак 3.13. Израчунати Комптонову таласну дужину, λ_C .

Решење:

Из једначине 3.16 се уочава да је Комптонова таласна дужина дефинисана преко фундаменталних константи:

$$\lambda_C = \frac{\hbar}{m_0 c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

односно у литератури се чешће среће вредност у ангстремима 0,02426 Å.

3.5. ТАЛАСНО-ЧЕСТИЧНИ ДУАЛИЗАМ (1924.)

$$h = \lambda p = \lambda mv \quad (3.17)$$

Детаљније на Атомистици

Задатак 3.14. Израчунали кинетичку енергију и таласну дужину електрона:

- a) из задатка 3.4
- б) који се креће брзином од 3000 km/s

Решење:

Користећи Де-Брольеву хипотезу:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad v &= 459108 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow E_k = 0,5998 \text{ eV} \quad \text{и} \quad \lambda = 1,584 \text{ nm} \\ \text{б)} \quad v &= 3000000 \frac{\text{м}}{\text{с}} \Rightarrow E_k = 25,585 \text{ eV} \quad \text{и} \quad \lambda = 2,425 \text{ Å} \end{aligned}$$

Задатак 3.15. Колика је таласна дужина електрона убрзаног напоном од 100 V?

Решење:

Како је енергија електрона добијена у електричном пољу на разлици напона U једнака eU , онда је:

$$E = eU = E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2meU}$$

и користећи Де-Брольеву хипотезу, следи:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

$$\lambda = 1,226 \text{ Å}$$

Задатак 3.16. Упоредити таласне дужине електрона, неutronа и атома хелијума са различитим кинетичким енергијама од 0,03, 1 и 10^4 eV.

Решење:

Слично као и у претходном задатку:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$$

са резултатима сумираним у следећој табели:

E_{kin} [eV]	λ [Å]		
	e^-	n_0	He
0,03	70,81	1,651	0,829
1	12,26	0,286	0,144
10^4	0,123	$2,860 \cdot 10^{-3}$	$1,436 \cdot 10^{-3}$

Задатак 3.17. Слободни неутрони имају време полураспада од 900 s. На којој раздаљини од извора неутронског спона енергије 1 nm се број неутрона преполови?

Решење:

Време потребно да се број број неутрона смањи на половину почетне вредности се добија из закона радиоактивног распада:

$$\frac{dN}{N} = -kdt = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int_{N_0}^N dlnN = - \int_0^t \frac{dt}{\tau} \Rightarrow N = N_0 e^{-dt/\tau}$$

где је τ време полураспада. Када је број неутрона N једнак половини почетног броја неутрона следи:

$$N = \frac{1}{2}N_0 \Rightarrow t = \tau ln2 = 623,8 \text{ s}$$

Сада се уз помоћ Де-Брольеве хипотезе лако долази до тражене раздаљине:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ v &= \frac{h}{m\lambda} \Rightarrow s = vt = \frac{ht}{m\lambda} = \frac{h\tau ln2}{m\lambda} \\ s &= 246776 \text{ m} = 246,8 \text{ km}\end{aligned}$$

Задатак 3.18. Лопта масе 300 g се креће брзином од 140 km/h. Нaђи таласну дужину лопте.

Решење:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \\ \lambda &= 5,679 \cdot 10^{-35} \text{ m}\end{aligned}$$

Мала таласна дужина значи да објекат у много већој мери испољава честичне у односу на таласне особине.

3.6. ШРЕДИНГЕРОВА ЈЕДНАЧИНА (1925.) - КВАНТНОМЕХАНИЧКИ МОДЕЛ АТОМА

Атом представља фундаменталан (основни) концепт у хемији. На основу Радерфордових експеримената и дотадашњих тумачења у физици постављен је планетарни модел атома, при чему је интеракција између позитивно наелектрисаног језгра и негативно наелектрисаних електрона описана Кулоновом, односно електростатичком интеракцијом. Овај модел атома тачно описује и предвиђа велики број експерименталних чињеница. Међу-

тим и поред успеха, према законима физике наспрам којих је постављен, планетарни атом не може постојати. Наиме, класична Њутнова механика каже да електрон који кружи око језгра има константно (угаоно) убрзање. Даље, на основу Максвелове теорије електромагнетизма, наелектрисање које се убрзано креће емитује зрачење. Стога, електрон би требало да у делићу секунде изгуби енергију и по спиралној путањи падне у језгро. Насупрот томе, зна се да су атоми од којих на начињена било која постојана суштица стабилни. Стога, на основу слагања са експерименталним резултатима, можемо рећи да је физичка структура атома добро описана планетарним моделом, али проблем настаје када се овај модел анализира помоћу закона класичне физике - физичка слика атома је добра али су једначине погрешне. Била је потребна нова теорија са тачним једначинама. Адекватан математички модел је пружила квантна механика.

Шредингер (нем. Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger, 1887-1961) је 1925. године постулирао¹¹, а 1926. године објавио **Шредингерову једначину** - основну једначину квантне механике. У најсажетијем облику временски независна Шредингерова једначина је:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \quad (3.18)$$

где је \hat{H} оператор укупне енергије који се зове Хамилтонијан,¹² E је укупна енергија, док је $\psi(\vec{r})$ таласна функција која описује стање система. Дакле, математичким функцијама $\psi(\vec{r})$ су представљена стања физичких система и то је један од постулата квантне механике. Израз за Хамилтонијан укључује кинетичку и потенцијалну енергију:

$$\hat{H} = \hat{H} = \hat{T} + \hat{U} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \hat{U}(\vec{r}) \quad (3.19)$$

У горњем изразу први члан се односи на кинетичку енергију и он је исти за све системе, док је \hat{U} карактеристика система, односно описује интеракције које доприносе потенцијалној енергији у систему. Основни динамички закон квантне механике је временски зависна Шредингерова једначина¹³ која представља пандан другом Њутновом закону у класичној механици:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \hat{H}\Psi(\vec{r}, t) \quad (3.20)$$

Из ове једначине се долази до временски независне Шредингерове једначине 3.18 тако што се претпостави да таласна функција $\Psi(\vec{r}, t)$ може да се представи као производ временски зависног и временски независног (просторног) дела:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\varphi(t) \quad (3.21)$$

¹¹Постулирао - поставио, а не извео.

¹²Оператори математички ентитети који делују на функцију и дају исту или нову функцију. Ипр. оператори су изводи, множење са промењивом x , степеновање, итд.

¹³Када се каже Шредингерова једначина онда се мисли на временски зависну Шредингерову једначину.

и онда се као таква уврсти у Шредингерову једначину 3.20:

$$i\hbar \frac{\partial (\psi(\vec{r})\varphi(t))}{\partial t} = \hat{H}(\psi(\vec{r})\varphi(t)) \quad (3.22)$$

Сада се могу раздвојити променљиве по просторним и временским координатама:

$$i\hbar \frac{1}{\varphi(t)} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{1}{\psi(\vec{r})} \hat{H}\psi(\vec{r}) \quad (3.23)$$

и са обзиром да лева страна једначине зависи само од временске координате а десна страна само од просторних координата, онда можемо рећи да су обе стране међусобно једнаке и да могу се изједначити са константом E .¹⁴

Онда следи:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{E}{i\hbar} \varphi(t) \quad \text{и} \quad \hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3.24)$$

Задатак 3.19. Решити временски зависни део Шредингерове једначине.

Решење:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t)}{dt} &= \frac{E}{i\hbar} \varphi(t) = -\frac{iE}{\hbar} \varphi(t) \\ \frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} &= -\frac{iE}{\hbar} dt \\ \int_0^\varphi \frac{d\varphi(t)}{\varphi(t)} &= -\frac{iE}{\hbar} \int_0^t dt \\ \varphi(t) &= e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \end{aligned}$$

односно, читава таласна функција из једначине 3.21 добија облик:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})\varphi(t) = \psi(\vec{r})e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

Задатак 3.20. Решити Шредингерову једначину за случај слободног електрона који се креће дуж позитивног дела x -осе.

Решење:

За слободан електрон једначина 3.20 узима облик:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2 \Psi(x, t)}{\partial x^2} \\ \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi(x, t) &= 0 \end{aligned}$$

Једна од назнака за облик решења Шредингерове једначине би била сличност са таласном једначином 2.9. Ипак, код таласне једначине

¹⁴Врло сугестивно одабрана ознака за константу.

фигуришу други изводи по времену, док је код Шредингерове једначине то први извод по времену. Ово значи да би свако решење које задовољава Шредингерову једначину требало да задовољава и класичну таласну једначину, с тим што је додатни општи захтев за облик решења Шредингерове једначине да функција има комплексну форму. Имајући ово у виду, решење за Шредингерову једначину из овог задатка можемо да представимо у форми равног таласа датог једначином 2.15, односно који се простира само дуж позитивне стране x -осе:

$$\Psi(x, t) = A e^{i(k_x x - \omega t)}$$

где A у општем случају може бити комплексна амплитуда претпостављеног решења. Уврштавањем ове једначине у Шредингерову једначину за овај случај се добија:

$$\begin{aligned} & \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) A e^{i(k_x x - \omega t)} = 0 \\ & i\hbar \left(-i\omega A e^{i(k_x x - \omega t)} \right) + \frac{\hbar^2}{2m_e} \left(-k_x^2 A e^{i(k_x x - \omega t)} \right) = 0 \\ & \left(\omega\hbar - \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m_e} \right) \Psi(x, t) = 0 \end{aligned}$$

а имајући у виду да је $E = \omega\hbar$ и $p_x = \hbar k_x$ онда се може писати да је:

$$\left(E - \frac{p_x^2}{2m_e} \right) \Psi(x, t) = 0$$

и с обзиром да се ради о слободном електрону који се креће дуж x -осе онда је:

$$E = \frac{p_x^2}{2m_e}$$

па одатле следи да једначина равног таласа који се простира дуж x -осе представља решење временски зависне Шредингерове једначине у овом случају.

Што се тиче оператора потенцијалне енергије, као што је већ речено, он зависи од типа система који се разматра. Код атома водоника, који се састоји од једног протона и једног електрона, потенцијална енергија потиче од њихове међусобне електростатичке Кулонове интеракције, за коју се користи израз из класичне механике:

$$\hat{U}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}, \quad (3.25)$$

где је r растојање између протона и електрона. Сада, користећи општи израз за хамилтонијан, односно једначину 3.19, у комбинацији са $\hat{U}(\vec{r})$ за

водоников атом (једначина 3.25), временски независна Шредингерова једначина за атом водоника се може написати на следећи начин:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (3.26)^{15}$$

За атом водоника, Шредингерову једначину је могуће егзактно (аналитички) решити. Решавањем се добијају изрази за таласне функције које описују стање електрона у атому водоника и енергије електрона које одговарају овим стањима. Скуп могућих вредности енергија представља **спектар атома водоника**. Егзактне једноелектронске таласне функције се називају **атомске орбитале**. Атомске орбитале атoma водоника имају посебан значај, с обзиром да су оне почетна тачка за апроксимативна (приближна) решења код сложенијих система. Квадрати модула таласних функција¹⁶, $|\psi(\vec{r})|^2$ дају **густину вероватноће** налажења електрона у одређеној тачки простора. Овај исказ је познат као Борнова (нем. Max Born FRS FRSE, 1882 - 1970) интерпретација таласне функције. Множењем густине вероватноће са коначном запремином добијамо вероватноћу налажења електрона у тој запремини, односно вероватноћа да се електрон нађе у неком коначном делу простора је:

$$P = \int_V |\psi(\vec{r})|^2 dV \quad (3.27)$$

Када би са V означили читав простор, тада би вероватноћа морала бити једнака јединици. Ова релација је општа и може се користити за било који систем описан таласном функцијом.

За све остale атоме (чак и за атом хелијума), услед постојања међусобне интеракције електрона (којих има два или више), Шредингерову једначину није могуће егзактно решити. Овај феномен се назива **динамичка електронска корелација** и представља главну препреку у тумачењу вишеелектронских система. Сваки електрон у вишеелектронском атому посматрамо као да се креће у ефективном пољу, које потиче од усредњене интеракције датог електрона са свим осталим електронима и језгром. На тај начин се добијају апроксимативне једноелектронске таласне функције које називамо **Хартријеве атомске орбитале**. Математички изрази Хартријевих орбитала су слични егзактним орбиталама атoma водоника, међутим енергије и густине вероватноће су другачије. Иако су у питању приближна решења, Хартријеве орбитале су веома корисне, с обзиром да могу послужити за објашњење многих особина атoma, периодичне промене ових особина као и структуре периодног система елемената.

¹⁵У оператору кинетичке енергије сада уместо масе електрона, m_e , фигурише редукована маса система језгро/протон-електрон, $\mu = m_e m_p / (m_e + m_p)$, где је m_p маса протона и уједно у овом случају маса језгра. Међутим μ и m_e се разликују за мање од 0,1 % па не би ни велика била евентуална грешка настала уврштавањем масе електрона уместо редуковане масе система. Колика је редукована маса система Земља-Сунце?

¹⁶С обзиром да се ради о комплексним функцијама у општем случају.

Математички поступак решавања Шредингерове једначине за атом водоника је компликован и није од интереса за овај курс.¹⁷ Међутим, у наредном поглављу ће бити дата крајња решења овог проблема (орбитале и енергије), с циљем разумевања особина орбитала и како те особине утичу на расподелу густине вероватноће налажења електрона у атомима, а последично и на многе особине атома.

Важно је напоменути да се у овом поглављу разматрала нерелативистичка Шредингерова једначина, односно једначина у којој нема инкорпориране релативистичке теорије. Релативистички пандан Шредингеровој једначини је Диракова једначина.

3.6.1. АТОМ ВОДОНИКА

Атом водоника је једноелектронски атом, састављен од протона и електрона. За све тзв. водоникоидне јоне, попут ${}_2\text{He}^+$, ${}_3\text{Li}^{2+}$, ${}_{79}\text{Au}^{78+}$ итд., могу се користити аналогне једначине као за H атом али се у разматрање мора узети и различито наелектрисање језгра ($+Ze$ уместо $+1e$) и редукована маса система.

Приликом решавања Шредингерове једначине за атом водоника, она се најпре преводи из Декартових (x, y, z) у сферне координате (r, θ, ϕ) .¹⁸ Као решења добијају се једноелектронске таласне функције (атомске орбитале) које се могу представити као производ радијалног дела $R_{n,l}(r)$ који зависи само од r координате и угаоног дела $Y_l^{m_l}(\theta, \phi)$ који зависи од угаоних координата θ и ϕ :

$$\psi_{n,l,m_l}(r, \theta, \phi) = R_{n,l}(r)Y_l^{m_l}(\theta, \phi) \quad (3.28)$$

и одговарајуће енергије (електрона у атому):

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\hbar^2 \epsilon_0} \frac{Z^2}{n^2} = -13,606 \frac{Z^2}{n^2} \text{ eV} \quad (3.29)$$

Индекси n , l и m_l у једначинама 3.28 и 3.29 представљају **квантне бројеве**. Лако се примећује да је израз 3.29 еквивалентан изразу за енергију који је добијен код Боровог модела атома 3.15. Битна разлика је начину на који су добијени ови изрази. У случају Боровог модела атома једначина за енергију је последица постулата, као и квантни број n . У случају квантномеханичког модела атома, обе једначине, као и сва три квантна броја, природно проистичу из Шредингерове једначине.

КВАНТНИ БРОЈЕВИ

Број n је **главни квантни број**. Он може имати целобројне позитивне вредности и њиме се означавају (квантују) дозвољене вредности енергије

¹⁷ Детаљно о решавању Шредингерове једначине за атом водоника на предметима „Атомистика” и „Квантна хемија”.

¹⁸ Оваква трансформација координата се уводи искључиво у циљу поједностављења проблема.

електрона. Енергетски нивои добијени на основу квантомеханичког разматрања се поклапају са нивоима које предвиђа Борова теорија заснована на постулатима чија основа лежи у класичној физици. Овде, међутим, квантација потиче из захтева да таласна функција мора бити непрекидна (јер електрони не могу нестајати у неким тачкама а другим се појављивају) и да у бесконачности за $r \rightarrow \infty$, функција ψ мора тежити нули, а не из постулата о дискретности угаоног момента.

Енергија јеноелектронског атома зависи само од n , јер потенцијална (Кулонова) енергија зависи само од радијалног растојања електрона од језгра. Међутим, Шредингерова једначина такође квантује и квадрат орбитног угаоног момента L^2 , као и његову пројекцију на z -осу, L_z . Квантација ових величина захтева два квантна броја. То су **орбитални квантни број**, l , који може имати вредности од 0 до $n - 1$ и **магнетни орбитални квантни број**, m_l , са вредностима од $-l$ до l са кораком од по један. Дозвољене вредности квадрата орбитног угаоног момента и његове пројекције на z -осу су:

$$\begin{aligned} L^2 &= l(l+1)\hbar^2 & l &= 0, 1, \dots, n-1 \\ L_z &= m_l \hbar & m_l &= -l, -l+1, \dots, 0, \dots, l-1, l \end{aligned} \quad (3.30)$$

Сваки скуп (n, l, m_l) означава одређено квантно стање атома (тј. електрона у атому) у коме је енергија електрона једнака E_n , орбитни угаони момент једнак $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ и његова пројекција једнака $m_l\hbar$. За $n > 1$ више квантних стања (укупно n^2) одговара једном енергетском нивоу E_n . За оваква стања се каже да су дегенерирана. Уобичајено је да се за стања уводе ознаке $1s, 2s, 2p, \dots$, где број представља вредност главног квантног броја n , а слова се додељују на основу вредности квантног броја l : s за $l = 0$, p за $l = 1$, d за $l = 2$, f за $l = 3$, g за $l = 4$ итд; понекад се у субскрипту додаје вредност квантног броја m_l .

Показало се, међутим, да је за потпуни опис стања електрона у атому потребно увести још два квантна броја. Наиме, као последица релативистичких ефеката, а који нису инкорпорирани у Шредингерову једначину, уводи се величина која се зове спински угаони момент, и која описује спинска стања електрона. Дозвољене вредности квадрата спинског угаоног момента електрона и његове пројекције на z -осу су:

$$\begin{aligned} S^2 &= s(s+1)\hbar^2 & s &= 1/2 \\ S_z &= m_s \hbar & m_s &= -s, \dots, 0, \dots, s = \pm 1/2 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Дакле уводе се **спински квантни број**, s , који за електроне у свим стањима има исту вредност која износи $1/2$ и **магнетни спински квантни број**, m_s који има вредности $+1/2$ (спин горе, \uparrow) и $-1/2$ (спин доле, \downarrow). За практичне примене у (квантној) хемији, најчешће је довољно да се реши нерелативистичка Шредингерова једначина и затим да се сваком електрону припише квантни број $m_s = \pm 1/2$. Дакле, за опис стања електрона у атому водоника потребна су четири квантна броја (квантни број s се најчешће изоставља јер не прави разлику међу стањима):

главни квантни број: $n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots$

орбитални квантни број: $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$

магнетни орбитални квантни број: $m = -l, -l + 1, \dots, 0, \dots, l - 1, l$

магнетни спински квантни број: $m_s = 1/2, -1/2$

и потпуна скраћена ознака за стање електрона у атому водоника би била: nl^{m_s} . Могуће вредности квантних бројева су илустроване у следећој табели:

Табела 3.1. Вредности квантних бројева код атома водоника, ознаке стања, број дегенерисаних стања и максималан број електрона на нивоима до $n = 3$.

n	1	2					3							
l	0	0	1			0	1			2				
m_l	0	0	-1	0	+1	0	-1	0	+1	-2	-1	0	+1	+2
s	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2	1/2
m_s	$\pm 1/2$													
	1s	2s	2p			3s	3p			3d				

Из горње табеле се лако закључује да је број стања за свако l једнак $2l+1$. Такође, број стања за свако n једнак је n^2 , а број електрона у нивоима за свако n једнак је $2n^2$.

Задатак 3.21. Које су могуће вредности квантног броја l за $n = 3$ и $n = 5$?

Решење:

За $n = 3 \Rightarrow l = 0, 1, 2$

За $n = 5 \Rightarrow l = 0, 1, 2, 3, 4$

Задатак 3.22. Које су могуће вредности квантног броја n за $l = 3$ и $l = 5$?

Решење:

За $l = 3 \Rightarrow n = 4, 5, 6, \dots$

За $l = 5 \Rightarrow n = 6, 7, 8, \dots$

Задатак 3.23. Који од наведених скупова квантних бројева (n, l, m_l, m_s) је могућ у случају атoma водоника:

a) $(4, 2, -1, 1/2)$

б) $(5, 0, -1, 1/2)$

в) $(4, 4, -1, 1/2)$

г) $(6, 0, 0, 1/2)$

д) $(2, 2, -1, -1/2)$