Универзитет у Београду
Факултет за физичку хемију

Увод у структуру материје

др Бранислав Миловановић

Интерна скрипта

Октобар 2022.

Скрипта са примерима и задацима вежбе из предмета „Увод у структуру материје”. Само за интерну употребу.

Предговор

Драги студенти,

Текст је тренутно у припреми, а за основу је служио материјал који сам наследио од колеге који је пре мене држао вежбе. Текст је пун (неумесних) коментара које студенти могу игнорисати током читања.

Како би рукопис био унапређен за наредне генерација, замолио бих студенте да ми укажу на грешке које уоче у тексу и исте пошаљу на e-mail адресу branislavm@ffh.bg.ac.rs

Бранислав Миловановић

Садржај

1 | Мерење и систем јединица

Мерење је један од начина упознавања природе и представља основ научних сазнања. Хемијски облик кретања материје (преображај супстанци променом њиховог састава и структуре) испитује се кроз мерења њених физичких карактеристика и физичких величина својствених свакој супстанци.

Физичка величина представља својство заједничко у квалитативним односима за многе супстанце, али карактеристично у квантитативном погледу за конкретну супстанцу - другим речима нешто што имају многе супстанце али у различитој мери.
На пример густина на 20°C за $KMnO_4$ износи 2,7 g/cm^3, за H_2O износи 0,998203 g/cm^3, док је за злато 19,3 g/cm^3. С друге стране, маса неутрона износи $1{,}674 \cdot 10^{-27}$ kg или $1{,}674 \cdot 10^{-21}$ mg - она је у суштини непроменљива, разлика је само у јединицама.

Мерити физичку величину значи експерименталним путем установити колико пута у тој физичкој величини има елементарних делова које називамо **јединицама физичке величине**. Резултат мерења се изражава као број (вредност) и јединица мерења.

Поставља се питање како знамо да је „један метар“ у Србији исти као „један метар“ у Јапану? Или како можемо осигурати да је „један метар“ данас исти као пре 20 година? Због тога се користи Међународни систем јединица (франц. *Système international d'unités*, скраћено СИ), установљен 1960. године, у коме је прописано које се јединице користе при мерењу физичких величина и како су дефинисане. СИ систем покрива јединице за сваки тип мерења, али у његовој основи се налази седам јединица:

Слика 1.1. Шематски приказ основних јединица и константи преко којих су дефинисане.

- секунда
- метар
- килограм
- ампер
- мол
- келвин
- кандела

Ових седам јединица се називају **основне јединице**, и изабране су тако да се њиховим комбиновањем могу изразити све остале мерне јединице, тзв.

изведене јединице. На пример, јединица за силу - њутн (N) - се добија као килограм пута метар кроз секунд на квадрат (kg·m/s^2).

На 26. састанку Генералне конференције за тегове и мере, одржаном 2018. године, донета је значајна одлука да се у СИ систем уведу нове дефиниције основних јединица.[1] Оне су сада дефинисане преко фундаменталних константи природе, које су најпостојаније и непроменљиве референце које можемо користити. Основне јединице и фундаменталне константе преко којих су дефинисане дате су у Табели 1.1, док се шематски приказ може видети на Слици 1.1.

Табела 1.1. Основне јединице и фундаменталне константе природе уз помоћ којих су дефинисане.

Јединица	Назив константе	Вредност са јединицом
Секунда (s)	Фреквенција хиперфиног прелаза у непертурбованом атому ^{133}Cs	$\Delta\nu = 9\,192\,631\,770$ Hz [1/s]
Метар (m)	Брзина светлости у вакууму	$c = 299\,792\,458$ m/s
Килограм (kg)	Планкова константа	$h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J · s
Ампер (A)	Елементарно наелектрисање	$e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C
Мол (mol)	Авогадрова константа	$N_A = 6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ 1/mol
Келвин (K)	Болцманова константа	$k_B = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}$ J/K
Кандела (cd)	Светлосна јачина монохроматског зрачења фреквенције 540·10^{12} Hz	$K_{cd} = 683$ lm/W

Поред СИ система у старијој литератури се неретко срећу и други системи јединица а од којих најчешће центиметар-грам-секунд (скраћено ЦГС, CGS или cgs) систем. Из самог назива овог система јединица је јасно да је основна јединица за дужину - центиметар, за масу - грам и за време- секунд. Ове три јединице су довољне како би се извеле све механичке јединице, док се на пример за јединице у оквиру електромагнетизма треба увести математичка веза између основних ЦГС и жељених јединица у оквиру електромагнетизма коришћењем физичких закона (на пример Кулоновог или Амперовог закона). Поред ЦГС система у употреби су некада били и стопа-фунта-секунд, метар-тона-секунд системи јединица. Такође, треба знати да се и данас у литератури учестало користе јединице ван СИ система попут: литар (1 L = 1 dm^3), електронволт (1 eV = $1{,}602176634 \cdot 10^{-19}$ J), унификована јединица атомске масе/далтон (1 u = $1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}$ kg), ангстрем (1 Å = 10^{-10} m) итд. Фундаменталне физичке константе су дате у Прилогу Д.1.

1.1. Секунда

Дефиниција. Секунда, симбол s, је основна СИ јединица за време. Дефинисана је узимањем фиксне бројне вредности фреквенције хиперфиног

---

[1] Детаље можете наћи на веб страници: `https://www.nist.gov/si-redefinition`

прелаза у непертурбованом основном стању атома ^{133}Cs, $\Delta\nu = 9\,192\,631\,770$ изражене у јединицама $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$.

Задатак 1.1. Колика је таласна дужина електромагнетног зрачења емитованог при овом прелазу?
Решење:

$$\Delta\nu = 9\,192\,631\,770\ \mathrm{s}^{-1}$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2{,}997\,924\,58 \cdot 10^{8}\ \mathrm{ms}^{-1}}{9{,}192\,631\,770 \cdot 10^{9}\ \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}03261\ \mathrm{m} = 3{,}3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}$$

1.2. МЕТАР

Дефиниција. Метар, симбол m, је основна СИ јединица дужине. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности брзине светлости у вакууму, c = 299 792 458, изражене у јединицама ms^{-1} где је секунда дефинисана преко фреквенције прелаза у атому цезијума $\Delta\nu$.

Ова дефиниција је установљена 2019. године. Раније је метар био дефинисан као растојање између две линије означене на еталону сачињеном од легуре платине-иридијума. Међутим, иако хемијски инертан, овај еталон се временом скраћивао да би након скоро сто година био краћи за 0,3 %.

Сличан принцип мерења поређењем са еталоном (штапом) краљ Едгар (староенгл. Ēadgār the Peaceable) је искористио како би стандардизовао дужину. Наиме, он је постројио 100 војника поред зида и укупну дужину њихових десних стопала поделио на 100 једнаких делова - тако је добио стандардну дужину стопала коју је назвао *foot*, у множини *feet* (на српском језику стопа, множина стопе). Затим је направио златан штап ове дужине који је држао у трезору, и прописао закон да трговци морају да проверавају своје мере поређењем са овим штапом. Уколико је трговачка мера била краћа кажњавао их је, с друге стране уколико је мера била дужа, трговци су већ сами себе казнили мањим приходима. Уведена је и већа јединица 1 yard = 3 foot. Ове јединице се и данас користе у англосаксонском систему, и изражене у СИ систему оне износе: 1 foot = 30,45 cm и 1 yard = 91,44 cm

Субатомске дужине

- $1{,}62 \cdot 10^{-35}$ m - Планкова дужина.

  Према теорији струна дужине мања од ове немају физичког смисла. Овај број приказан у децималном запису износи:
  0,000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 0162 .

- 10^{-21} m - Де Брољева таласна дужина протона чија је енергија 45 eV (погледати ***Задатак 2.13.***).

- 10^{-18} m - горња граница величине кваркова и електрона.

Атомска скала

- 10^{-14} m - радијус језгра атома.
- $37 \cdot 10^{-12}$ m - радијус атома H.

  Ако би у атому H језгро било димензије муве на центру игралишта за фудбал, тада би простор који заузима цео атом био величине целог стадиона.
- $32 \cdot 10^{-12}$ m - радијус атома He.
- $227 \cdot 10^{-12}$ m - радијус атома K.

  Важно је запамтити ред величине: језгро 10^{-14} m, атоми 10^{-9} m. Ред величине 10^{-9} m значи да су радијуси атома приближно између 10^{-8} и 10^{-10} m.
- $154 \cdot 10^{-12}$ m - типична дужина C-C везе.
- $500 \cdot 10^{-12}$ m - ширина протеинског хеликса.
- $20 - 450 \cdot 10^{-9}$ m - величина вируса.
- $380 - 780 \cdot 10^{-9}$ m - таласна дужина видљиве светлости (не треба мешати са величином ствари које можемо видети голим оком $\approx 10^{-4}$ m).

Људска скала

- 10^{-4} m - дебљина власи косе.
- 1,75 m - просечна висина човека. Кад раширимо руке распон је отприлике једнак нашој висини, што је понекад згодно искористити за процену дужине.

Астрономска скала

- $3{,}5 \cdot 10^{6}$ m - пречник Месеца.
- $12{,}8 \cdot 10^{6}$ m - пречник Земље.
- $1{,}4 \cdot 10^{9}$ m - пречник Сунца.
- $2,9979 \cdot 10^{8}$ m - светлост пређе у једној секунди (светлосна секунда).
- $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m $= 150 \cdot 10^{6}$ km - растојање од Земље до Сунца.
- 10^{13} m - пречник Сунчевог система.
- $9{,}46 \cdot 10^{15}$ m - светлосна година (астрономска мера за дужину а не време).
- $8{,}7 \cdot 10^{26}$ m - видљиви Свемир.

Задатак 1.2. Колико атома може да се смести на дужину од 1 cm?
Решење:

$$l_{\text{ат}} = 10^{-9}\ \text{m} \qquad l = 1\ \text{cm} = 10^{-2}\ \text{m}$$

$$n_{\text{ат}} = \frac{l}{l_{\text{ат}}} = \frac{10^{-2}}{10^{-9}} = 10^7 \text{ атома}$$

Задатак 1.3. Колико пута треба пресећи кликер на пола да би се дошло до једног атома?
Решење:
Претпоставимо да је кликер пречника 1 cm као и да поседујемо идеално сечиво којим се ово може извести. Ако је радијус атома 10^{-9} m а кликера 1 cm $= 10^{-2}$ m онда се на следећи начин долази до неопходног броја пресецања кликера на пола (n):

$$\frac{1 \text{ cm}}{2^n} = \frac{10^{-2} \text{ m}}{2^n} = 10^{-9} \text{ m} \Rightarrow n = 23,253 \approx 23 \text{ пута}$$

Само 23 пута!?

Задатак 1.4. Да ли је Свемир празан?
Решење:
Запремина видљивог Свемира (претпоставимо да је сферног облика):

$$V_{\text{Свемир}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\left(\frac{8,7 \cdot 10^{26} \text{ m}}{2}\right)^3 \approx 10^{80} \text{ m}^3$$

Запремина атома:

$$V_{\text{атом}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\left(10^{-9} \text{ m}\right)^3 \approx 10^{-27} \text{ m}^3$$

Број атома у Свемиру: $\approx 10^{78} - 10^{82}$. Одакле овај број?
Рецимо да је приближан број галаксија $5 \cdot 10^{11}$, а број Звезда у галаксијима $4 \cdot 10^{11}$, лако добијамо да је укупан број Звезда $\approx 2 \cdot 10^{23}$. Нека је просечна маса Звезда 10^{35} g, добијамо да је укупна маса Звезда у Свемиру 10^{58} g. Наравно, уведена је оправдана претпоставка да су Звезде далеко масивније и веће од осталих објеката, који се онда могу занемарити у овом рачуну. Уз познату масу протона $\approx 10^{-24}$ g, добијамо да је број протона у Свемиру:

$$n_p = \frac{10^{58} \text{ g}}{10^{-24} \text{ g}} \approx 10^{82}$$

То је уједно и највећи број атома, јер језгра неких атома имају више протона. На крају када се број атома помножи њиховом запремином добија се да атоми заузимају укупно простор од:

$$10^{82} \cdot 10^{-27} \text{ m}^3 = 10^{55} \text{ m}^3$$

С друге стране, запремина видљивог Свемира је 10^{80} m^3, што је 25 редова величине (десет милиона милијарди милијарди пута) веће од простора који заузимају сви атоми. Дакле, Свемир је поприлично празан! Или можда није?
Закључак: Суштина овог задатка није у одговору, већ у поступку вршења апроксимације, тј. исправном поступку вршења процене и ефикасног/брзог приближног прорачуна.

1.3. Килограм

Дефиниција. Килограм, симбол kg, је основна СИ јединица масе. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности Планкове константе $h = 6{,}626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ изражене у јединицама $\mathrm{J \cdot s = kg \cdot m \cdot s^{-1}}$, где су метар и секунда дефинисани преко фундаменталних константи, брзине светлости c, и фреквенције прелаза у атому ^{133}Cs, $\Delta\nu$.

Стара дефиниција, попут дефиниције метра, укључивала је еталон: килограм је једнак маси међународног еталона масе - цилиндра од легуре платине (90 %) и иридијума (10 %) чија су висина и пречник 39 mm. Такође, и овај еталон није непроменљив, па је у последњих сто година изгубио око 50 μg.

Не мешати масу и тежину![2] Маса је мера инерцијалних и гравитационих особина тела, док је тежина сила која се јавља као узајамно дејство тела и гравитационог поља. Маса неког тела је иста на Земљи и Месецу, али је тежина истог тела приближно 6 пута мања на Месецу него на Земљи јер је убрзање силе Земљине теже 6 пута веће од убрзања силе Месечеве теже, $g_z = 6g_m$.

Испод су приказане вредности маса неких објеката:

- $9{,}10938356 \cdot 10^{-31}$ kg - маса електрона (најлакша елементарна честица са ненултом масом мировања).
- 1 u = $1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}$ kg - атомска јединица масе.
- $3{,}2 \cdot 10^{-25}$ kg - маса молекула кофеина.
- 10^{-12} kg - људска ћелија.
- 10^{-6} kg - комарац.
- $7 \cdot 10^{-3}$ kg - два зрна сувог грожђа.
- $2 \cdot 10^{-1}$ kg - поморанџа.
- $2{,}5 - 4,5$ kg - беба, крупна беба.
- 70 kg - човек.
- $1{,}2 \cdot 10^{4}$ kg - највећи слон (највећи копнени сисар).
- $1{,}8 \cdot 10^{5}$ kg - плави кит (највећа животиња која је икад живела на планети Земљи).
- $5 \cdot 10^{11}$ kg - укупна маса свих људи.
- 10^{24} kg - маса Земље.
- 10^{30} kg - маса Сунца.
- 10^{41} kg - маса Сунчевог система.
- 10^{52} kg - маса видљивог Свемира.

---

[2] За ово се добија јединица из физике у основној школи.

1.4. Ампер

Дефиниција. Ампер, симбол A, је основна СИ јединица за јачину електричне струје. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности елементарног наелектрисања, $e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$, израженог у јединицама C = A·s, где је секунда дефинисана преко фреквенције прелаза у атому ^{133}Cs, $\Delta\nu$.

Стара дефиниција је била: један ампер је стална електрична струја која би, када би се одржавала у два права паралелна проводника, бесконачне дужине и занемарљиво малог попречног пресека, који се налазе у вакууму на међусобном растојању од једног метра, проузроковала међу тим проводницима силу једнаку $2{\cdot}10^{-7}$ N по метру дужине.

Испод су приказане вредности јачине струје и њихов утицај на наше тело:

- 0,001 A - можемо осетити.
- 0,005 A - изазива бол.
- 0,010 A - изазива контракцију мишића.
- 0,015 A - изазива губитак контроле над телом.
- 0,070 A - изазива озбиљна оштећења тела.

1.5. Мол

Дефиниција. Мол, симбол mol, је основна СИ јединица за количину супстанце. Један мол садржи тачно $6{,}022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ елементарних јединки. Овај број је фиксна бројна вредност Авогадрове константе, N_A, изражене у јединицама mol^{-1} и назива се Авогадров број.

Стара дефиниција је била: мол је количина супстанце која садржи онолико честица колико има атома у 12 g угљениковог изотопа ^{12}C (погледати поглавље 2.1.1.).

Задатак 1.5. Колико молекула, електрона и атома садржи 1 mol H_2?
Решење: $6{,}022 \cdot 10^{23}$ молекула, $12{,}044 \cdot 10^{23}$ електрона и атома.

Задатак 1.6. Колика је маса једног мола лубеница?
Решење:
Ако се узме да просечна лубеница има 5 kg, један мол лубеница има:
$m = 5\text{ kg}\cdot\ 6{,}022 \cdot 10^{23} = 3,011 \cdot 10^{24}$ kg

Задатак 1.7. Колика је маса и наелектрисање једног мола електрона?
Решење:
$m = 9{,}102{\cdot}10^{-31}\text{ kg} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} = 5{,}486 \cdot 10^{-7}$ kg.

$q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C $\cdot\ 6{,}022 \cdot 10^{23} = 9{,}649 \cdot 10^{4}$ C

Задатак 1.8. Колика је енергија једног мола фотона фреквенције $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Hz?
Решење:
$E = h\nu N_A = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s $\cdot\ 5 \cdot 10^{14}$ 1/s $\cdot\ 6{,}022 \cdot 10^{23} = 1{,}995 \cdot 10^{5}$ J

Задатак 1.9. Колико електрона има у 0,5 L воде?
Решење:
0,5 L = 0,5 kg воде.
1 mol : 18 g = x mol : 500 g $\quad\Rightarrow\quad$ x = 27,78 mol воде.
n_e =27,78 mol $\cdot\ 6{,}022 \cdot 10^{23} \cdot 10$ e$^-$ = $1{,}67 \cdot 10^{26}$ e$^-$

Задатак 1.10. Колико молова свески има у амфитеатру?
Решење:
Оптимистична процена је да у амфитеатру има 50 студената који слушају вежбе из предмета „Увод у структуру материје” и да је бар половина понела свеску да нешто запише (или само да жврка како би убили време) онда у амфитеатру има:

$$\frac{25}{6,022 \cdot 10^{23}\ 1/\mathrm{mol}} \approx 4 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{mol\ свезака}$$

1.6. КЕЛВИН

Дефиниција. Келвин, симбол K, је основна СИ јединица за термодинамичку температуру. Дефинисан је узимањем фиксне бројне вредности Болцманове константе, $k_B = 1{,}380\,649 \cdot 10^{-23}$ изражене у јединицама J·K^{-1} = kg·m^2·s^{-2}K^{-1}, где су килограм, метар и секунда дефинисани преко константи h, c и $\Delta\nu$.

1.7. КАНДЕЛА

Дефиниција. Кандела, симбол cd, је основна СИ јединица за јачину светлости. Дефинисана је узимањем фиксне бројне вредности светлосне јачине монохроматског зрачења фреквенције 540·10^{12} Hz, $K_{cd} = 683$ изражене у јединицама lm·W^{-1}= cd·sr·W^{-1} или cd·sr·kg^{-1}·m^{-2}·s^3, где су килограм, метар и секунда дефинисани преко h, c и $\Delta\nu$.

sr је стерадиан (просорни угао), изведена јединица у СИ систему и који је дефинисан као просторни угао код центра кугле полупречника r затворен делом површине кугле са површином r^2.

2 | Материја

Материја је изграђена од комбинација једноставних облика материје који се називају **хемијским елементима**. **Елемент** је у том смислу **супстанција** која је сачињена од само једне врсте **атома**.

Сматра се да је појам атома увео старогрчки филозоф Леукип из Елеје (грч. *Λϵύκιππος*, живео око 450 п. н. е.) да би његов ученик Демокрит из Абадере (грч. Δ*ημόκρίς* живео око 460. п. н. е. - око 370. п. н. е.) наставио да ради на тој идеји. Њих двојица се сматрају првим атомистичарима и да су први који су у античкој филозофији изградили материјалистичко-монистички систем. Модернију верзију атома је предложио Џон Далтон (енгл. John Dalton FRS, 1766 - 1844) 1807. године уз експерименталну потпору, а са главним закључцима који су проистекли из његове атомистичке теорије[1]:

- Елементи су сачињени од веома малих честица које се називају атомима.
- Атоми датог елемента су индентични у смислу величине, масе и других својстава.
- Атоми не могу бити подељени на мање делове, створени или уништени.[2]
- Атоми различитих елемената се комбинују и целобројним односима градећи хемијска једињења.
- У хемијским реакцијама, атоми се прерасподељују између хемијских једињења стварајући нова хемијска једињења.

Сваки елемент има једиствен назив и хемијски симбол. Имена елемената су изведена на најразличитије начине, на пример по имену научника [Rf - Rutherfordium, по Ернесту Радерфорду (енгл. Ernest Rutherford, 1st Baron Rutherford of Nelson, OM, FRS, HonFRSE, 1871 - 1937]), државе (Po - Polonium, по Пољској) или географским одредницама [Cu - Copper (лат. Cuprum), бакар, изведено из назива оства Кипар].

---

[1] Далтонова књига „A New System of Chemical Philosophy” у којој је приказан његој атомистички рад се у оригиналној форми може пронаћи на веб страници: `https://library.si.edu/digital-library/book/newsystemofchemi12dalt`

[2] Данас знамо да ово није сасвим тачно јер знамо да осим хемијских постоје нуклеарне реакције.

2.1. Нуклеарни атом

Прва експериментална индикација да атом није кугла која не поседује унутрашњу структуру је потекла од енглеског научника Томпсона (енгл. Sir Joseph John Thomson OM PRS, 1856 - 1940) који је 1906. године награђен Нобеловом наградом за физику за откриће субатомске *честице* - електрона.[3]

Основне карактеристике савременог модела атома су:

- Атоми су сачињени од **субатомских честица**[4] које се називају **електрони**, **протони** и **неутрони**.
- Протони и неутрони формирају компатни ентитет ($\approx 10^{-14}$ m) у средишњем делу атома који се назива атомско језгро (лат. nucleus) и које се карактерише великом густином наелектрисања.
- Електрони су дистибуисани („размазани”) у простору око језгра слично облаку чије су димензије $\approx 10^{-9}$ m.

Атом је у целини електронеутралан, односно позитивно наелектрисање језгра је егзактно поништено негативним наелектрисањем електрона који га окружују. Основне карактеристике поменутих субатомских честица се налазе у Табели 2.1.

Табела 2.1. Особине неких субатомских честица.

Честица	Симбол	Налектрисање $[e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C]	Маса [kg]
Електрон	e^-	-1	$9,109 \cdot 10^{-31} = 5,486 \cdot 10^{-4}$ u
Протон	p^+	$+1$	$1,673 \cdot 10^{-27} = 1,007\,29$ u
Неутрон	n^0	0	$1,675 \cdot 10^{-27} = 1,008\,61$ u

О величини језгра и самог атома се знало нешто више 1908. године када је Радерфорд уз помоћ Гајгера (нем. Johannes Wilhelm Geiger, 1882 - 1945)) и Марсдена (енгл. Sir Ernest Marsden CMG CBE MC FRS, 1889 - 1970) извео закључке из једноставног (и генијалног) експеримента у коме се алфа (α) четицама бомбардује свега неколико атомских слојева танка златна фолија.[5] Овај експеримент је показао да α честице (јегра атома хелијума

---

[3] Интересантно је да је и његов син Џорџ Томпсон (енгл. Sir George Paget Thomson, FRS, 1892 - 1975) такође добио Нобелову награду за физику 1937. године за то што је показао, супротно открићу свог оца, да електрони имају и својства *таласа*. О овоме више на предмету „Атомистика”.

[4] Субатомске честице су све честице мање од атома, без обзира на њихову сложеност, док појам **елементарне честице** обухвата честице које се не могу изделити на мање сложене компоненте. Елементарне честице су описане још увек некомплетном теоријом под називом Стандардни модел који је плод комбинације квантне теорије поља, квантне механике и теорије релативности. Укратко, Стандардни модел описује честице које се могу груписати у кваркове, лептоне и бозоне. Више о Стандардном моделу на предмету „Радиохемија и нуклеарна хемија”.

[5] Како су знали како истање фолију да буде довољно танка, када нису знали којих димензија је атом?

$^4He^{2+}$ које потичу из радиоактивног извора) лако пролазе кроз фолију и том приликом њихов сноп не скреће значајно. Ипак ,одређени део α честица скреће или се одбија натраг ка извору што је Радефорда навело на то да је сва маса, као и сво позитивно наелектрисање атома злата сконцентрисано у малом језгру а чији је радијус процењен на $\approx 10^{-14}$ m. Радијус читавог атома је реда величине $\approx 10^{-9}$ m што указује на то да су атоми поприлично „шупљи" те да α честице лако могу да прођу кроз неколико атома танку златну фолију. Овај експеримент је претходни Томпсонов модел потпуно обесмислио с обзиром да су Томпсон и део научне заједнице тог времена сматрали да су негативно наелектрисани електрони диспергoвани у облаку позитивног наелектрисања, попут некаквог раствора.

Како би се језгра хемијских елемената, а самим тим и сами хемијски елементи разликовали потребно је одредити им број протона у атомском језгру. Самим тим ће бити познат и број електрона у електронеутралном хемијском елементу. Овај број се назива **атомски број** елемента и означава се са **Z** (ознака потиче од немачке речи за број, zahl). Атомски број се назначава у супскрипту са леве стране хемијског симбола ($_Z$X). Ипак, сваки елемент има свој јединствен симбол који аутоматски кореспондира јединственом атомском броју тог елемента. Атомски број директно утиче на хемијске особине елемената с обзиром да показује и број електрона у електронеутралном атому. До 2022. године елемент са највећим редним бројем је $_{118}$Og - Oganesson добијен у егзотичној нуклеарној реакцији и са временом живота од око 0,66 ms.

2.1.1. Изотопи

Атомски број показује број протона у језгру неког елемента. Ипак, у језгру се поред протона налазе и неутрони, субатомске честице неутралне у смислу наелектрисања. Протони и неутрони се заједно називају нуклеонима. Присуство неутрона несумњиво доводи до повећања масе језгара, с обзиром да су релативно сличних мâса, али не и до (значајнијих) промена хемијских особина елемената.[6] Стога се, поред атомског броја, уводи и **масени број** елемента и означава се са **A** (ознака потиче од немачке речи atomgewicht, што значи атомска тежина). Масени број се назначава у суперскрипту са леве стране хемијског симбола (^A_ZX). Сада се недвосмислено може одредити број неутрона у језгру неког елемента (**N**). У природи се међутим могу наћи елементи који имају исти атомски број (исти елементи) а различити масени број. Овакви атоми се називају **изотопима**. На пример, водоник има два стабилна изотопа и један радиоактиван изотоп који се налазе у природи. То су: ^{1}H, ^{2}H и ^{3}H, који се још обележавају и као: H, D и T и називају се водоник, деутеријум и трицијум, респективно. Присутност прва два стабилна изотопа у природи је 99.972 % и 0.028 %

---

[6] Један или два неутрона мањка или вишка се неће скоро уопште одразити на хемијске особине тежих елемената (на пример Pb или U). То није случај код лаких елемената попут H, с обзиром да додатак једног или два неутрона повећава масу двоструко или троструко. Ово може имати последице на разне особине хемијских једињења у којима се ови изотопи налазе.

док се трећи налази у траговима.

Задатак 2.1. Симбол неког елемента је $^{53}_{24}\mathrm{X}^{2+}$.
1) Како се зове тај елемент?
2) Колико протона се налази у његовом језгру?
3) Колико неутрона се налази у његовом језгру?
4) Колико електрона садржи електронски омотач?

Решење:
1) Cr - хром
2) 24 p^+
3) 29 n^0
4) 22 e^-

Задатак 2.2. Језгро неког атома садржи 16 неутрона, а његов електронски омотач садржи 15 електрона. Како се назива елемент чији је изотоп дати атом? Написати његов симбол и назначити атомски и масени број.

Решење:
$^{15}_{31}\mathrm{P}$ - изотоп фосфора

2.1.2. РЕЛАТИВНА АТОМСКА МАСА

С обзиром да сваки елемент у природи има одређени изотопски састав, практично је потребно знати средњу масу атома датог елемента, тј. усредњену на природан изотопски састав. **Релативна атомска маса** (ознака A_r и без јединица) је средња маса атома елемента који има природни изотопски састав, у односу на 1/12 масе атома $^{12}_{6}\mathrm{C}$.[7] Алтернативно, релативна атомска маса се може дефинисати као број који показује колико пута атом неког елемента има већу масу од 1/12 масе атома $^{12}_{6}\mathrm{C}$.[8] Маса елемента или атома се добија множењем релативне атомске масе са **унификованом атомском масом** или **далтоном** (ознака m_u са јединицама **u** или **Da**), односно величином која је дефинисана као 1/12 масе неутралног атома $^{12}_{6}\mathrm{C}$ који није хемијски везан и који се налази у основном нуклеарном и електронском стању као и у стању мировања. У СИ систему: $1\ \mathrm{u} = 1\ \mathrm{Da} = 1{,}660\,539\,066\,60 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ Треба имати на уму да се на Земљи локално могу пронаћи различити изотопски састави. Тако на пример елемент бор добијен из руде у Турској нема исту релативну атомску масу као исти елемент добијен из руде у Калифорнији.

---

[7] IUPAC је прописао релатвне атомске масе за све познате елементе и могу се наћи на веб страницама: `https://iupac.qmul.ac.uk/AtWt/` и `https://www.ciaaw.org/`. Студентима, међутим, ово често није потребно с обзиром да ће (намерно или случајно) заокруживати релативне атомске масе на цео број или у најбољем случају на полуброј.

[8] Зашто је за потребе дефинисања релативне атомске масе изабран баш атом $^{12}_{6}\mathrm{C}$?

Задатак 2.3. Колика је релативна атомска маса елемента угљеника, а колика изотопа $^{12}_{6}\mathrm{C}$. Природни изотопски састав угљеника је: $^{12}_{6}\mathrm{C}$ 98,9 % и $^{13}_{6}\mathrm{C}$ 1,1 %.
Решење:
За елемент угљеник:

$$A_r(\mathrm{C}) = \frac{98,9 \cdot 12 + 1,1 \cdot 13}{100} = 12,011$$

За изотоп $^{12}_{6}\mathrm{C}$:

$$A_r(^{12}_{6}\mathrm{C}) = 12,000$$

Задатак 2.4. Природни магнезијум се састоји од три изотопа: $^{24}\mathrm{Mg}$, $^{25}\mathrm{Mg}$ и $^{26}\mathrm{Mg}$. Израчунати просечну релативну атомску масу природног магнезијума (елемента Mg) ако је природни садржај поменутих изотопа: 78,6 %, 10,1 % и 11,3 %, редом.
Решење:
Слично као и претходни задатак:

$$A_r(\mathrm{Mg}) = \frac{78,6 \cdot 24 + 10,1 \cdot 25 + 11,3 \cdot 26}{100} = 24,33$$

Задатак 2.5. Израчунати релативну атомску масу елемента хрома ако је његов природан изотопски састав:

4,345 %	$^{50}_{24}\mathrm{Cr}$
82,79 %	$^{52}_{24}\mathrm{Cr}$
9,501 %	$^{53}_{24}\mathrm{Cr}$
2,365 %	$^{54}_{24}\mathrm{Cr}$

Решење: $A_r(\mathrm{Cr}) = 51,5359$

Треба напоменути и да већи атомски број не мора нужно да значи већу релативну атомску масу. На пример $A_r(_{52}\mathrm{Te}) > A_r(_{53}\mathrm{I})$ што је последица природног изотопског састава ова два елемента:

18,84 %	$^{126}_{52}\mathrm{Te}$
31,74 %	$^{128}_{52}\mathrm{Te}$
34,08 %	$^{130}_{52}\mathrm{Te}$
$A_r(_{52}\mathrm{Te}) = 127,60$	

100 %	$^{127}_{53}\mathrm{I}$
$A_r(_{53}\mathrm{I}) = 126,96$	

Такође, $A_r(_{18}\mathrm{Ar}) > A_r(_{19}\mathrm{K})$

0,3377 %	$^{36}_{18}\mathrm{Ar}$
0,0630 %	$^{38}_{18}\mathrm{Ar}$
99,600 %	$^{40}_{18}\mathrm{Ar}$
$A_r(_{18}\mathrm{Ar}) = 39,95$	

93,26 %	$^{39}_{19}\mathrm{K}$
0,012 %	$^{40}_{19}\mathrm{K}$
6,730 %	$^{41}_{19}\mathrm{K}$
$A_r(_{19}\mathrm{K}) = 39,10$	

као и, $A_r({}_{27}\text{Co}) > A_r({}_{28}\text{Ni})$

		68,077 %	${}^{58}_{28}\text{Ni}$
		26,223 %	${}^{60}_{28}\text{Ni}$
		1,140 %	${}^{61}_{28}\text{Ni}$
		3,635 %	${}^{62}_{28}\text{Ni}$
100 %	${}^{59}_{27}\text{Co}$	0,925 %	${}^{64}_{28}\text{Ni}$
$A_r({}_{27}\text{Co}) = 58,93$		$A_r({}_{28}\text{Ni}) = 58,69$	

2.1.3. Моларна маса

Релативне атомске масе су својство појединих елемената, док је у случају супстанција погодно дефинисати неко групно својство. **Моларна маса** је дефинисана ако маса једног мола хемијског елемента или хемијског једињења.[9] Овакву дефиницију омогућава својство да се у маси одређеног хемијског елемента, која је бројчано једнака релативној атомској маси тог елемента, налази исти број атома који је једнак Авогадровом броју - $N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}. Авогадров број може да се тумачи и као просечан број нуклеона у једном граму материје (сачињене од молекула/атома).[10]

Дефинисана на овај начин, моларна маса неког елемента X се са релативном атомском масом може повезати на једноставан начин:

$$\text{Моларна маса елемента} = M(\text{X}) = A_r(\text{X}) \cdot \frac{\text{g}}{\text{mol}} \tag{2.1}$$

Задатак 2.6. Израчунати масе атома елемената C, P и Cr ако су дате њихове моларне масе.

Решење:

$$M(\text{C}) = 12,011\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad M(\text{P}) = 30,974\ \frac{\text{g}}{\text{mol}} \quad M(\text{Cr}) = 51,996\ \frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

$$m_a(\text{C}) = \frac{M(\text{C})}{N_A} = \frac{12,011\ \text{g/mol}}{N_A} = 1,994 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}$$

$$m_a(\text{P}) = \frac{M(\text{P})}{N_A} = \frac{51,996\ \text{g/mol}}{N_A} = 5,143 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}$$

$$m_a(\text{Cr}) = \frac{M(\text{Cr})}{N_A} = \frac{30,974\ \text{g/mol}}{N_A} = 8,634 \cdot 10^{-26}\ \text{kg}$$

Задатак 2.7. Израчунати масе атома елемената C, P и Cr ако су дате њихове релативне атомске масе.

---

[9] Ово нас, међутим, не ограничава да дефинишемо моларну масу за стаклене кликере, лубенице или зрнца пасуља.

[10] Електрони су у овом смислу потпуно занемарени.

Решење:

$$\begin{aligned}
&A_r(\mathrm{C}) = 12,011 \quad A_r(\mathrm{P}) = 30,974 \quad A_r(\mathrm{Cr}) = 51,996\\
m_a(\mathrm{C}) &= A_r(\mathrm{C})\ m_u = A_r(\mathrm{C})\ \frac{1\ \mathrm{g/mol}}{N_A}\\
&= A_r(\mathrm{C}) \cdot 1,660\,5 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{g} = 1,994 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{g}\\
m_a(\mathrm{P}) &= A_r(\mathrm{C})\ m_u = A_r(\mathrm{P})\ \frac{1\ \mathrm{g/mol}}{N_A}\\
&= A_r(\mathrm{P}) \cdot 1,660\,5 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{g} = 5,143 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{g}\\
m_a(\mathrm{Cr}) &= A_r(\mathrm{C})\ m_u = A_r(\mathrm{Cr})\ \frac{1\ \mathrm{g/mol}}{N_A}\\
&= A_r(\mathrm{Cr}) \cdot 1,660\,5 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{g} = 8,634 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{g}
\end{aligned}$$

Задатак 2.8. Упоредити број атома који садржи по један грам атома елемената C, P и Cr.

Решење:

$$\begin{aligned}
&12,011\ \mathrm{g\ C}\ :\ 6,022 \cdot 10^{23}\ \text{атома} = 1\ \mathrm{g}\ :\ x\\
&x = 5,013 \cdot 10^{22}\ \text{атома C}\\
&30,974\ \mathrm{g\ P}\ :\ 6,022 \cdot 10^{23}\ \text{атома} = 1\ \mathrm{g}\ :\ x\\
&x = 1,994 \cdot 10^{22}\ \text{атома P}\\
&51,996\ \mathrm{g\ Cr}\ :\ 6,022 \cdot 10^{23}\ \text{атома} = 1\ \mathrm{g}\ :\ x\\
&x = 1,158 \cdot 10^{22}\ \text{атома Cr}
\end{aligned}$$

Задатак 2.9. Колико молова је садржано у 100 g чистих елемената C, P и Cr.

Решење:

$$n = \frac{m}{M}$$

$$n(\mathrm{C}) = \frac{100\ \mathrm{g}}{M(\mathrm{C})} = 8,3257\ \mathrm{mol}$$

$$n(\mathrm{P}) = \frac{100\ \mathrm{g}}{M(\mathrm{P})} = 3,2285\ \mathrm{mol}$$

$$n(\mathrm{Cr}) = \frac{100\ \mathrm{g}}{M(\mathrm{Cr})} = 1,9232\ \mathrm{mol}$$

Задатак 2.10. Израчунати моларну масу лубенице.

Решење:

Ако се узме да просечна лубеница има 5 kg, један мол лубеница има: $m = 5$ kg$\cdot$ 6,022 $\cdot\, 10^{23} = 3,011 \cdot 10^{24}$ kg што значи да је моларна маса лубенице:

$$3,011 \cdot 10^{27}\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

Малициозни коментар на овај задатак би био да у разматрање није узет изотопски састав лубенице. Ипак, како се дистрибуција масе лубенице може сматрати континуалном, придев *просечна* уз лубеница ову процену моларне масе чини нешто бољом. Такође, овај задатак је већ решен у оквиру ***Задатка 1.5.***.

2.1.4. Дефект масе

У Задатку 2.5 су дати су дати примери елемената са само једним стабилним изотопом у природи (што не значи да се вештачки не могу створити нестабилни изотопи). Неки типични примери би били $^{19}_{9}\mathrm{F}$, $^{59}_{27}\mathrm{Co}$ и $^{127}_{53}\mathrm{I}$ са релативним атомским масама које износе 18,998, 58,933 и 126,964, респективно. Лако је приметити да су њихове релативне атомске масе јако блиске али не и једнаке масеним бројевима ових елемената: 19, 59 и 127. Ово је последица тзв. **дефекта масе** (ознака Δm) који је дефинисан као разлика маса мировања слободних нуклеона и језгра које сачињавају:

$$\Delta m = Zm_p + Nm_n - m_{\text{језгра}} \tag{2.2}$$

Питање је шта се дешава са овом масом? Она се приликом стварања језгра директно претвара у енергију везе језгра, односно енергију коју је потребно уложити како би се сви нуклеони из јегра које је у стању мировања превели у бесконачно удаљене слободне честице у стању мировања. Енергија везе се на овај начин може израчунати уз помоћ чувене Ајнштајнове (нем. Albert Einstein, 1879 - 1955) једначине:

$$E = mc^2 \tag{2.3}$$

а која проистиче и специјалне теорије релативности. Ова релација је општа, тј. важи за било који тип материје. Само за љубитеље: Ако се неко тело приближава посматрачу брзином бликој брзини светлости, релативистичка маса се повећава како би из посматрачевог угла том телу било све теже да убрза до брзине светлоси c (ништа што има масу не може да се креће брзином светлости). Енергија мировања коју тело има у стању мировања је једнака mc^2. Закон одржања енергије указује да, у било каквој реакцији, смањење масе у систему мора бити праћено повећањем кинетичке енергије честица у систему. Аналогно, маса у систему се може повећати на конто кинетичке енергије честица.

<u>Задатак 2.11.</u> Израчунати дефект масе код атома $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$, $^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}$ (α честица) и $^{2}_{1}\mathrm{H}$ (D).

Решење:

$^{56}_{26}\mathrm{Fe} \Rightarrow$ A= 56; Z= 26; N= $56 - 26 = 30$

$$A_r(^{56}_{26}\mathrm{Fe}) = 55,9207 \Rightarrow m(^{56}_{26}\mathrm{Fe}) = 55,9207 \cdot m_u = \\ = 55,9207 \cdot 1,6605 \cdot 10^{-27}\ kg$$

$\Delta m = 26 \cdot m_{p^+} + 30 \cdot m_{n^0} - m(^{56}_{26}\mathrm{Fe})$
$\Delta m = 8,7828 \cdot 10^{-28}$ kg

$^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+} \Rightarrow$ A= 4; Z= 2; N= 2
$A_r(^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}) = 4,00153 \Rightarrow m(^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+}) = 4,00153 \cdot m_u$
$\Delta m = 2 \cdot m_{p^+} + 2 \cdot m_{n^0} - m(^{4}_{2}\mathrm{He}^{2+})$
$\Delta m = 5,0463 \cdot 10^{-29}$ kg

$^{2}_{1}\mathrm{H} \Rightarrow$ A= 2; Z= 1; N= 1
$A_r(^{2}_{1}\mathrm{H}) = 2,01355 \Rightarrow m(^{2}_{1}\mathrm{H}) = 2,01355 \cdot m_u$
$\Delta m = 1 \cdot m_{p^+} + 1 \cdot m_{n^0} - m(^{2}_{1}\mathrm{H})$
$\Delta m = 4,0018 \cdot 10^{-30}$ kg

Да ли је у реду да се електрони изоставе приликом разматрања дефекта масе?

<u>Задатак 2.12.</u> Израчунати енергију везе (укупну и по нуклеону) за $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$, $^{4}_{2}\mathrm{He}$ и $^{2}_{1}\mathrm{H}$. Који атом је најстабилнији?
Решење:
У претходном задатку су израчунати дефекти маса за ова три атома:
$\Delta m(^{56}_{26}\mathrm{Fe}) = 8,7828 \cdot 10^{-28}$ kg
$\Delta m(^{4}_{2}\mathrm{He}) = 5,0463 \cdot 10^{-29}$ kg
$\Delta m(^{2}_{1}\mathrm{H}) = 4,0018 \cdot 10^{-30}$ kg

И коришћењем једначине 2.3 лако се налази да су енергије везе:
$E_{\text{везе}}(^{56}_{26}\mathrm{Fe}) = \Delta m(^{56}_{26}\mathrm{Fe})c^2 = 7,9045 \cdot 10^{-11}$ J
$E_{\text{везе}}(^{4}_{2}\mathrm{He}) = \Delta m(^{4}_{2}\mathrm{He})c^2 = 4,5417 \cdot 10^{-12}$ J
$E_{\text{везе}}(^{2}_{1}\mathrm{H}) = \Delta m(^{2}_{1}\mathrm{H})c^2 = 3,6016 \cdot 10^{-13}$ J

Док се енергија везе по нуклеону једноставно добија дељењем енергије везе са масеним бројем, тј. укупним бројем нуклеона у језгру:

$$E_{\text{по нук.}}(^{56}_{26}\mathrm{Fe}) = \frac{E_{\text{везе}}(^{56}_{26}\mathrm{Fe})}{\mathrm{A}(^{56}_{26}\mathrm{Fe})} = 1,4115 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

$$E_{\text{по нук.}}(^{4}_{2}\mathrm{He}) = \frac{E_{\text{везе}}(^{4}_{2}\mathrm{He})}{\mathrm{A}(^{4}_{2}\mathrm{He})} = 1,1354 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

$$E_{\text{по нук.}}(^{2}_{1}\mathrm{H}) = \frac{E_{\text{везе}}(^{2}_{1}\mathrm{H})}{\mathrm{A}(^{2}_{1}\mathrm{H})} = 1,8008 \cdot 10^{-13}\ \mathrm{J}$$

Посматрајући енергије везе по нуклеону закључује се да је атом $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ најстабилнији. Као што се може приметити, ове енергије су изузетно мале. Ипак, треба имати на уму да се ради о само једном атому!

Задатак 2.13. Претворити енергију по нуклеону из претходног задатка у eV. Колико килотона (ТНТ) енергије треба уложити да би се сви нуклеони једног мола атома $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ раздвојили на бесконачну удаљеност?
Решење:

У физици честица се често користи јединица **електронволт** (eV) и представља кинетичку енергију коју један електрон добије када из стања мировања у електричном пољу убрза на разлици електричних потенцијала од једног волта. Енергија коју наелектрисане честице добијају у електричном пољу се може израчунати као:

$$E = qU \qquad [1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{C} \cdot \mathrm{V}] \tag{2.4}$$

Односно, у случају када је наелектрисање q једнако наелектрисању електрона e, и када је разлика потенцијала U једнака 1 V, следи да је: $1\ \mathrm{eV} = 1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}$
У конкретном случају за дате атоме:

$$E_{\text{по нук.}}(^{56}_{26}\mathrm{Fe}) = \frac{1,4115 \cdot 10^{-12}}{1,6022 \cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 8,8\ \mathrm{MeV}$$
$$E_{\text{по нук.}}(^{4}_{2}\mathrm{He}) = \frac{1,1354 \cdot 10^{-12}}{1,6022 \cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 7,1\ \mathrm{MeV}$$
$$E_{\text{по нук.}}(^{2}_{1}\mathrm{H}) = \frac{1,8008 \cdot 10^{-13}}{1,6022 \cdot 10^{-19}}\ \mathrm{eV} = 1,1\ \mathrm{MeV}$$

Килотони ТНТ-а се, с друге стране, користе како би се описала потенцијална деструктивност еплозивних материјала. Тринитротолуен (ТНТ) се узима као референтна еплозивна материја. Енергија која се ослободи приликом детонације 1000 тона ТНТ (1 килотон) је једнака $4,184 \cdot 10^{12}$ J.

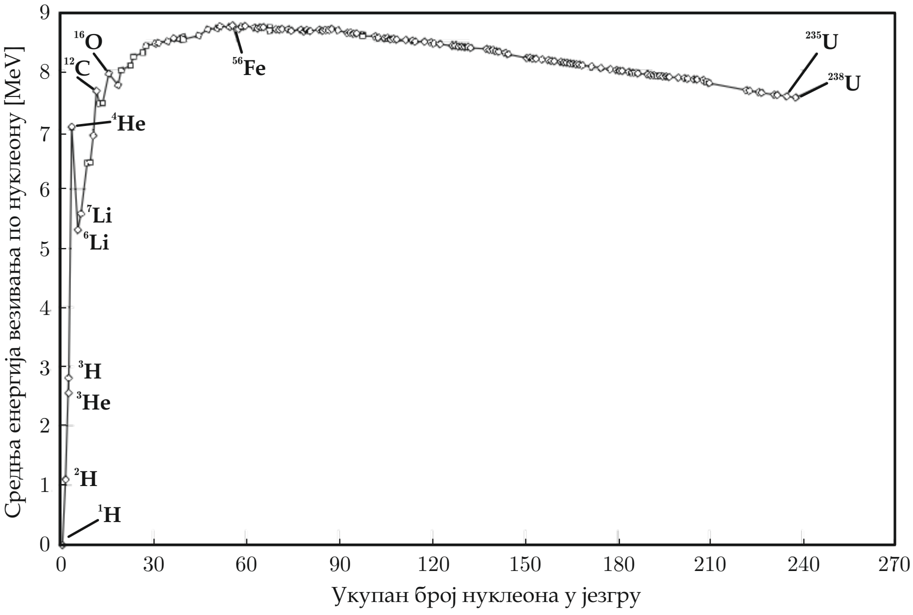
За један мол атома $^{56}_{26}\mathrm{Fe}$ укупна енергија складиштена у енергијама везе је:

$$\begin{aligned} E_{\text{укупно, 1 mol}} &= 1\ \mathrm{mol} \cdot N_A \cdot E_{\text{везе}} \\ &= 1\ \mathrm{mol} \cdot 6,022 \cdot 10^{23}\ \frac{1}{\mathrm{mol}} \cdot 7,9045 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J} \\ &= 4,7601 \cdot 10^{13}\ \mathrm{J} = 11,38\ \text{килотона ТНТ} \end{aligned}$$

Дакле, за овај теоретски ексцес (разлагање једног мола ≈ 59 g гвожђа до бесконачно удаљених нуклеона) би било потребно уложити онолико енергије колико се ослободи приликом детонације око 11 000 тона ТНТ-а. Најјаче оружје које је човек икада детонирао је Цар бомба (рус. Царь-бóмба) са експлозивном снагом еквивалентном детонацији 50 000 000 – 58 000 000 тона ТНТ.

Из претходног задатка се види да језгро атома $^{56}_{26}$Fe има велику енергију везе по нуклеону (8,79036 MeV). Ако израчунамо енергију везе за све познате елементе (за све њихове изотопе) видећемо да од атома $^{56}_{26}$Fe већу енергију везе по нуклеону имају само $^{58}_{26}$Fe и $^{62}_{28}$Ni, 8,79214 MeV и 8,79460 MeV, респективно. На Слици 2.1 су приказане енергије везивања по нуклеону за све познате изотопе. Са слике се види и да неки изотопи испољавају посебно велику стабилност, попут $^{16}_{8}$O и $^{4}_{2}$He, што има везе са „магичним” бројевима.[11] Наиме, изотопи са парним пројем протона и неутрона испољавају већу стабилност од осталих. Иако је $^{62}_{28}$Ni најстабилнији атом од свих, ипак у Звездама које гледају „смрт у очи” најзаступљенији су изотопи гвожђа $^{58}_{26}$Fe и $^{56}_{26}$Fe, с обзиром да је $^{62}_{28}$Ni подложан фотодезинтеграцији као и другим нуклеарним реакцијама.

Слика 2.1. Средња енергија везивања по нуклеону за све познате изотопе свих елемената периодног система.



Од значаја је поменути и нуклеарне реакције **фузије** и **фисије**. И при једној и при другој нуклеарној реакцији долази до ослобађања енергије. У првом случају се ради о спајању два лака језгра у стабилније, теже, језгро. Том приликом долази до ослобађања великих количина енергије (погледати задатак 2.12 као и да је на Слици 2.1 приказана енергија ве-

---

[11] Више о овоме на предмету „Радиохемија и нуклеарна хемија”.

зе по нуклеону). У случају фисије долази до разлагања масивних језгара што такође води ка стабилнијим јегрима и ослобађању великих количина енергије.[12]

<u>Задатак 2.14.</u> Упоредити енергије везивања у језгру (између нуклеона) и атому (између језгра и електрона) на примеру атома $^2_1$H чија је енергија јонизације 15,5 eV.

Решење:

Енергија јонизације представља енергију потребну довести атому у гасовитом стању како би се на бесконачну удаљеност изместио најслабије везани електрон.

У претходном задатку је израчуната енергија везивања по нуклеону за атом $^2_1$H:

$E_{\text{по нук.}} \approx 1,1$ MeV $= 1\,100\,000$ eV

Ако овај број упоредимо са енергијом јонизације која износи 15,5 eV, видимо да је везивање између нуклеона око 7000 пута јаче у односу на везивање електрона у истом атому. Ова груба процена даје одговор на питање из Задатка 2.11.

<u>Задатак 2.15.</u> Колико енергије је потребно уложити да би се јонизовао 1 mol атома водоника? Енергија јонизације елементарног атома водоника износи 13,6 eV.

Решење:

Ако за један атом водоника енергија јонизације износи $E_I = 13,6$ eV, онда је за један мол потребно:

$$E_{I,mol} = E_I N_A = 13,6\ \text{eV}\ 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol} = 1312,03\ \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$$

<u>Задатак 2.16.</u> Лампа снаге 100 W сија непрекидно 2 сата. Колики је дефект масе лампе услед губитка енергије путем светлости? Сматрати да се сва енергија троши на стварање светлости.

Решење:

Дефект масе се и у овом случају може израчунати помоћу једначине 2.3:

$$\begin{aligned}\Delta m &= \frac{E}{c^2} = \frac{P \cdot t}{c^2} \\ &= \frac{100\ \text{W} \cdot 2 \cdot 3600\ \text{s}}{(2,9979 \cdot 10^8\ \text{m/s})^2} \\ &= 8,0112 \cdot 10^{-12}\ \text{kg} = 8,0112\ \text{pg}\end{aligned}$$

---

[12] Човек је ово, наравно, искористио како би произвео енергију у нуклеарним реакторима. Такође, човек не би био човек када исту ствар не би употребио и за оружје - атомске (фисионе), термонуклеарне (фузионе) бомбе као и многе друге варијанте бомби.

Ако лампа има 100 g, колико дуго би требало да сија како би потрошила 1 % своје масе?

2.2. ФУНДАМЕНТАЛНЕ СИЛЕ (ИНТЕРАКЦИЈЕ)

Фундаменталне интеракције или фундаменталне силе су иредуцибилне интеракције у природи, односно интеракције које се не могу изделити на основније. Ове интеракције су сумиране у Табели 2.2 док су особине носиоца интеракције сумиране у Табели 2.3.

Табела 2.2. Фундаменталне интераксије у природи.

Интеракција	Медијатор интеракције	Релативна јачина[a]	Зависност од удаљености	Домет [m][a]
Слаба	$W^{\pm}$ и Z^0 бозони	10^{-6}	$\sim (1/r)\ e^{-m(W^{\pm},Z^0)r}$	10^{-18}
Јака	глуони	1	$\sim r$	10^{-15}
Електромагнетна	фотони	1/137	$\sim 1/r$	∞
Гравитациона	гравитони[б]	$6 \cdot 10^{-39}$	$\sim 1/r$	∞

[a] Егзактне јачине и домети интеракција зависе од особина и типа честица које интереагују.
[б] Хипотетички преносиоци интеракције - нису експериментално потврђени.

Табела 2.3. Особине медијатора (носиоца) интеракције.

Медијатор интеракције	Спин	Наелектрисање [e]	Маса мировања [GeV/c^2]
$W^{\pm}$	$s = 1$	$q = \pm 1$	$m = 80,4$
Z^0	$s = 1$	$q = 0$	$m = 91,2$
глуон	$s = 1$	$q = 0$	$m = 0$
фотон	$s = 1$	$q = 0$	$m = 0$
гравитон	$s = 2$	$q = 0$	$m = 0$

Обратити пажњу на масе $W^{\pm}$ и Z^0 бозона. Да ли исте наведене особине код глуона и фотона значи да ти преносиоци интеракције имају исте особине? Шта значи када преносиоци интеракције имају масу мировања једнаку нули?

Свака од основне интеракције се може математички описати физичким пољем. Физичка поља за слабу, јаку и електромагнетну интеракцију су квантирана (дискретна) док се за гравитационо поље то још увек није показало. Теорија квантне гравитације тренутно представља највећу непознаницу модерне физике.

Гравитациону интеракцију осећају све честице које имају масу. На атомском нивоу, гравитација је најслабија од све четири основне интеракције. Гравитационо привлачење два тела масе m_1 и m_2 је дато Њутновим (енгл. Sir Isaac Newton PRS, 1642 – 1726/27[13]) законом гравитације:

$$F_g = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{2.5}$$

где су γ гравитациона константа[14] која износи $6,674\,30 \cdot 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$ и r растојање између два тела масе m_1 и m_2.

Електромагнетне интеракције се јављају између свих наелектрисаних честица. Део ове интеракције се може тумачити уз помоћ електростатичке интеракције која се јавља када наелектрисане честице мирују и у том случају се сила која делује између њих може проценити уз помоћ Кулоновог (фра. Charles-Augustin Coulomb, 1736-1806) закона:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} \tag{2.6}$$

где је ϵ_0 диелектрична константа (пермитивност) вакуума и износи $8,854 \cdot 10^{-12}\mathrm{F/m}$, q_1 и q_2 наелектрисања честица и r растојање између честица. Уколико се наелектрисана честица креће у магнетном пољу на њу ће деловати магнетна сила која се може израчунати помоћу Лоренцове (хол. Hendrik Antoon Lorentz, 1853 - 1928) једначине:

$$\vec{F_l} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{2.7}$$

где су $\vec{E}$ електрично поље и $\vec{B}$ магнетно поље које делују на честицу која се креће брзином $\vec{v}$ и има наелектрисање q. Други члан у овој једначини се односи на магнетну компоненту силе. Магнетно поље $\vec{B}$ може бити стално магнетно поље од неког на пример преманентног магнета. У том случају магнетну силу која делује на наелектрисану честицу је лако израчунати.[15] У случају да је потребно описати магнетно поље наелектрисане честице која се креће (константном брзином) или на пример магнетно поље металног проводника кроз који протиче електрична струја константне јачине, најпогодније је користити Био-Саваров (фра. Jean-Baptiste Biot, 1774 - 1862; Félix Savart, 1791 - 1841) закон:

---

[13] За збрку око године(!) смрти једног од највећих научника свих времена консултовати веб страницу:
https://thonyc.wordpress.com/2015/03/20/calendrical-confusion-or-just-when-did-newton-die/

[14] Најлошије одређена фундаментална константа.

[15] Условно речено. Ако у некој књизи из физике/физичке хемије наиђете на флоскулу: „Лако је показати” или „Лако израчунати”, немојте ни тренутка помислити да ћете исто урадити са лакоћом.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{l} \times \vec{r'}}{|\vec{r'}|^3} \tag{2.8}$$

где је μ_0 магнетна пермеабилност вакуума и износи $1,256\,637 \cdot 10^{-6}$ H/m[16], I јачина струје кроз проводник, $d\vec{l}$ диференцијални елемент вектора постављен дуж проводника постављеног дуж пута C, $\vec{r'} = \vec{r} - \vec{l}$ је растојање између диференцијалног елемента вектора $d\vec{l}$ и тачке $\vec{r}$ у којој се израчунава вредност магнетног поља $\vec{B}(\vec{r})$. Овај закон може бити поприлично тешко употребљив (у аналитичком смислу) у зависности од тога колико је компликована путања кретања наелектрисања (C) које ствара магнетно поље $\vec{B}$. Генерализацију Био-Саваровог закона у смислу узимања у обзир релативистичких ефеката (коначне брзине светлости) је дао Јефименко (рус. Олег Дмитриевич Ефименко, 1922 - 2009). По датуму рођења твораца једначина 2.6, 2.7 и 2.8 може се закључити да су оне важеће у класичном лимиту, односно да у њима нема инкорпориране квантне теорије.

Слаба интеракција делује унутар самог атомског језгра. Сама природа интеракције је веома компликована и делује само на изузетно малим растојањима и сматра се да је заслужна за одређене типове радиокативних распада с обзиром да може да утиче на промену структуре самих нуклеона. На пример, приликом β^+ распада долази до трансформације: $n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \bar{\nu}_{e^-}$ унутар атомског језгра.[17] Оваква трансформација доводи до фундаменталне промене атомског језгра, односно до промене типа елемента с обзиром да се посредством слабе силе један неутрон трансформисао у протон те да је дошло до повећања атомског броја за један. Још једна интересантна ствар је да слаба сила не може да произведе везана стања између честица на субатомском нивоу, а исто се може рећи и за гравитациону силу на астрономским скалама.

Јака интеракција је најјача од све четири фундаменталне интеракције и комбинује особине електромагнетне интеракције (у смислу јачине) и слабе интеракције (у смислу домета деловања). Јака интеракција држи нуклеоне на окупу у атомском језгру. Да нема ове интеракције, нуклеони (а пре свега протони) би се „разлетели" један од другог, с обзиром на електростатичко одбијање. Интересантно је се јачина ове интеракције скалира доста другачије од осталих сила (Табела 2.2).

<u>Задатак 2.17.</u> Упоредити електромагнетну, гравитациону и јаку силу између два протона на растојању од 10^{-15} m.

Решење:

---

[16] Диелектрична пермитивност (ϵ_0) и магнетна пермеабилност (μ_0) су у тесној вези:

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

[17] $\bar{\nu}_{e^-}$ је једна од елементарних честица која се назива електронски антинеутрино.

Увешћемо следеће ознаке за интеракције: g - гравитациона, em - електромагнетна, s - јака, w - слаба. Гравитациона и електромагнетна (електростатичка) интеракција се могу проценити уз помоћ једначина 2.5 и 2.6:

$$F_g = \gamma\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6,67430{\cdot}10^{-11}\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2}{\cdot}\frac{(1,6726\cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg})^2}{(10^{-15}\ \ \mathrm{m})^2} = 1,9{\cdot}10^{-34}\ \mathrm{N}$$

$$F_{em} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\ 8,854\cdot 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{m}^2\mathrm{N}}}\cdot\frac{(1,602\cdot 10^{-19}\ \mathrm{C})^2}{(10^{-15}\ \ \mathrm{m})^2} = 230\ \mathrm{N}$$

док се јака и слаба интеракција могу проценити релативно, знајући вредности из Табеле 2.2:

$$F_s = 137F_{em} = 31510\ \mathrm{N} \approx 30000\ \mathrm{N}$$

$$F_w = 10^{-6}F_s \approx 0,03\ \mathrm{N}$$

Процена показује да је јака сила, као и што сам назив сугерише, убедљиво најјаче делује на два протона који се налазе настојању које је реда величине радијуса атомског језгра. 30000 N одговара тежини тела које има масу од 3 тоне и стоји негде на површини Земље! Најслабија интеракција у овом случају није слаба интеракција (баш незгодно што се тако зове), већ гравитациона.

2.3. ЕЛЕКТРОМАГНЕТНО ЗРАЧЕЊЕ

Спектар у општем случају представља континуалну или дискретну уређеност неког физичког својства у односу на енергију. У физичкохемијским наукама од посебног значаја је спектар електромагнетног зрачења. **Електромагнетно зрачење** се састоји од таласа електромагнетног поља која се простиру кроз простор и са собом носе енергију у виду зрачења (радијације). Електромагнетно поље је (у класичном смислу - погледати поглавље 3) физичко поље које производе наелектрисања која се убрзано крећу и сачињено је од синхронизованих осцилујућих електричних и магнетних поља. Један такав електромагнетни талас је илустрован на слици 2.2. Електромагнетни талас са слике 2.2 је линеарно поларизован дуж y-осе, што значи да му вектор електричног поља осцилује искључиво у yz-равни.[18] У вакууму, електромагнетни таласи се простиру[19] брзином светлости, c. Електромагнетни таласи су трансферзални таласи[20] и у хомо-

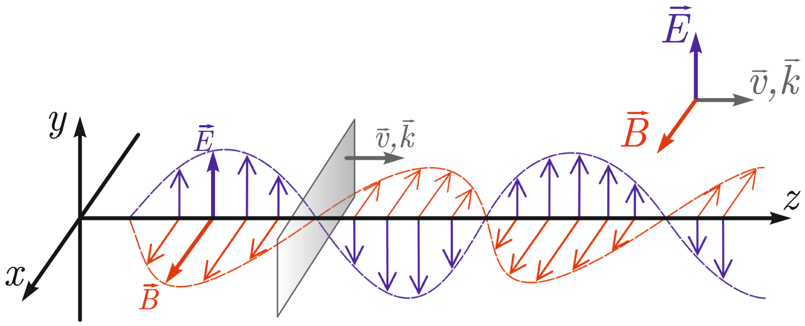
---

[18] Више о типовима поларизације електромагнених таласа на предмету „Општи курс физичке хемије 1”.

[19] Њихов таласни фронт.

[20] Трансферзални таласи су таласи код којих се осцилације врше нормално у односу

Слика 2.2. Електромагнетни талас линеарно поларизован дуж y-осе који се простире дуж z-осе. $\vec{E}$ и $\vec{B}$ означавају узајамно нормална електрична и магнетна поља. $\vec{k}$ означава таласни вектор који је нормалан на таласни фронт (сиви правоугаоник).



геним и оптички изотропним срединама вектори електричног и магнетног поља су узајамно нормални. Типови електромагнетног зрачења уређеног по фреквенцијама (енергијама, или таласним дужинама) су приказани у табели 2.4. Алтернативно, у оквиру квантне теорије (погледати поглавље 3), електромагнетни таласи се могу посматрати као таласи сачињени од фотона (погледати табелу 2.2), ненаелектрисаних елементарних честица које немају масу (мировања) и представљају медијаторе (носиоце) електромагнетних интеракција. Фотони су способни да интереагују са материјом и у зависности од фреквенције и снаге зрачења да изазивају различите промене у њој. Најгрубља подела електромагнетног зрачења је на јонизујуће и нејонизујуће, у зависности од тога да ли фотони електромагнетних таласа могу да изазову хемијске промене у атомима/молекулима или не. Хемијске промене у овом смислу подразумевају да долази до јонизације атома у материји и последично до измене електронске структуре. Тако јонизовани атоми унутар материје лако могу да ступе у (фото)хемијске реакције. Грана физике која се бави међусобном интеракцијом фотота и интеракцијом фотона са материјом се зове (квантна) електродинамика. Фотони се најбрже крећу (максималном брзином) у вакууму, брзином светлости c. У другим, оптички гушћим, срединама фотони се могу кретати и много спорије, па се тако нпр. видљива зелена светлост (≈ 500 nm) креће око 2,5 пута и 3,6 пута спорије када пролази кроз дијамант и галијум-фосфид, респективно. Научна дискусија око брзине светлости се интензивирала крајем 19. века, с обзиром да се различите експерименталне аномалије [Физоов (фра. Armand Hippolyte Fizeau, 1819-1896) експеримент, светлосна аберација] нису могле објаснити простом таласном

на правац простирања. Супротно њима, лонгитудинални таласи су таласи код којих се осцилације врше паралелно са правцем простирања таласа. Типични примери трансферзалних и лонгитудиналних таласа су морски таласи и звук, респективно.

Табела 2.4. Класификација електромагнетног зрачења и енергетски опсези.

Тип зрачења, назив и ознаке					Таласна дужина λ	Фреквенција ν	Енергија по фотону $E = h\nu$
Јонизујуће	гама		γ		<1 pm	$>3 \cdot 10^{20}$ Hz	>1,24 MeV
	X	тврдо X	HX		1 pm−10 pm	$3 \cdot 10^{20}$ Hz−$3 \cdot 10^{19}$ Hz	1,24 MeV−124 keV
		меко X	SX		10 pm−10 nm	$3 \cdot 10^{19}$ Hz−$3 \cdot 10^{16}$ Hz	124 keV−124 eV
	ултраљубичасто	вакуумско	екстремно	EUV	10 nm−121 nm	$3 \cdot 10^{16}$ Hz−$2{,}48 \cdot 10^{15}$ Hz	124 eV−10,25 eV
			Лајман α	H-Lyman-α	121 nm-122 nm	$2{,}48 \cdot 10^{15}$ Hz−$2{,}46 \cdot 10^{15}$ Hz	10,25 eV−10,16 eV
			F-UV	далеко	122 nm−200 nm	$2{,}46 \cdot 10^{15}$ Hz−$1{,}5 \cdot 10^{15}$ Hz	10,16 eV−6,2 eV
Нејонизујуће		средње	UV-C	C	200 nm−280 nm	$1{,}5 \cdot 10^{15}$ Hz−$1{,}1 \cdot 10^{15}$ Hz	6,2 eV−4,4 eV
		блиско	UV-B	B	280 nm−315 nm	$1{,}1 \cdot 10^{15}$ Hz−$9{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz	4,4 eV−3,9 eV
			UV-A	A	315 nm−380 nm	$9{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz−$7{,}9 \cdot 10^{14}$ Hz	3,9 eV−3,3 eV
	видљиво	љубичасто	VIS		380 nm−450 nm	$7{,}9 \cdot 10^{14}$ Hz−$6{,}7 \cdot 10^{14}$ Hz	3,3 eV−2,8 eV
		плаво			450 nm−485 nm	$6{,}7 \cdot 10^{14}$ Hz−$6{,}2 \cdot 10^{14}$ Hz	2,8 eV−2,6 eV
		тиркизно			485 nm−500 nm	$6{,}2 \cdot 10^{14}$ Hz−$6{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz	2,6 eV−2,5 eV
		зелено			500 nm−565 nm	$6{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz−$5{,}3 \cdot 10^{14}$ Hz	2,5 eV−2,2 eV
		жуто			565 nm−590 nm	$5{,}3 \cdot 10^{14}$ Hz−$5{,}1 \cdot 10^{14}$ Hz	2,2 eV−2,1 eV
		наранџасто			590 nm−625 nm	$5{,}1 \cdot 10^{14}$ Hz−$4{,}8 \cdot 10^{14}$ Hz	2,1 eV−2,0 eV
		црвено			625 nm−750 nm	$4{,}8 \cdot 10^{14}$ Hz−$4{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz	2,0 eV−1,7 eV
	инфрацрвено	блиско	IR-A	NIR, IR-A	0,75 μm−1,4 μm	$4{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz−$2{,}1 \cdot 10^{14}$ Hz	1,7 eV−0,9 eV
		краткоталасно	IR-B	SWIR, IR-B	1,4 μm−3 μm	$2{,}1 \cdot 10^{14}$ Hz−$1{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz	0,9 eV−0,4 eV
		средње	IR-C	MIR	3 μm−8 μm	$1{,}0 \cdot 10^{14}$ Hz−$3{,}7 \cdot 10^{13}$ Hz	0,4 eV−0,2 eV
		дуготаласно		LWIR	8 μm−15 μm	$3{,}7 \cdot 10^{13}$ Hz−$2{,}0 \cdot 10^{13}$ Hz	0,2 eV−83 meV
		далеко	FIR		15 μm−1000 μm	$2{,}0 \cdot 10^{13}$ Hz−$3 \cdot 10^{11}$ Hz	83 meV−1 meV
	микроталасно	екстремно високо	EHF		1 mm−100 mm	$3 \cdot 10^{11}$ Hz−$3 \cdot 10^{10}$ Hz	1 meV−0,1 meV
		супер високо	SHF		1 cm−10 cm	$3 \cdot 10^{10}$ Hz−$3 \cdot 10^{9}$ Hz	0,1 meV−0,01 meV
		ултра-високо	UHF		10 cm−100 cm	$3 \cdot 10^{9}$ Hz−$3 \cdot 10^{8}$ Hz	0,01 meV−1 μeV
	радифреквентно	веома високо	VHF		1 m−10 m	$3 \cdot 10^{8}$ Hz−$3 \cdot 10^{7}$ Hz	1 μeV−0,1 μeV
		високо	HF		10 m−100 m	$3 \cdot 10^{7}$ Hz−$3 \cdot 10^{6}$ Hz	0,1 μeV−0,01 μeV
		средње	MF		100 m−1000 m	$3 \cdot 10^{6}$ Hz−$3 \cdot 10^{5}$ Hz	0,01 μeV−1 neV
		ниско	LF		1 km−10 km	$3 \cdot 10^{5}$ Hz−$3 \cdot 10^{4}$ Hz	1 neV−0,1 neV
		веома ниско	VLF		10 km−100 km	$3 \cdot 10^{4}$ Hz−$3 \cdot 10^{3}$ Hz	0,1 neV−0,01 neV
		ултра-ниско	ULF		100 km−1 Mm	3000 Hz−300 Hz	0,01 neV−1 peV
		супер ниско	SLF		1 Mm−10 Mm	300 Hz−30 Hz	1 peV−0,1 peV
		екстремно ниско	ELF		10 Mm−100 Mm	30 Hz−3 Hz	0,1 peV−0,01 peV

теоријом светлости. 1905. године Ајнштајн представља своју Специјалну теорију релативности[21] у којој су простор и време подложни променама у односу на брзину кретања што је дало објашњење да је брзина електромагнетних таласа константна из угла свих посматрача, чак и оних који се крећу релативно једни у односу на друге.

Поред најгрубље поделе на јонизујуће и нејонизујуће зрачење (табела 2.4), електромагнетни таласи се могу разврстати и у друге класе, нпр. у спектроскопске регионе[22]:

- Гама (γ) зрачење
- Рендгенско (X) зрачење
- Ултраљубичасто (енгл. ultraviolet - UV) зрачење
- Видљиво (енгл. visible - VIS) зрачење
- Инфрацрвено (енгл. infrared - IR) зрачење
- Микроталасно (енгл. microwave) зрачење
- Радиофреквентно (енгл. radio wave) зрачење

поређане по енергијама од већих ка мањим. Границе за поделе по одређеним типовима електромагнетног зрачења нису јасно дефинисане а у табели 2.4 поменути региони су разграничени на начин на који се то најчешће среће у литератури. Типови, као и особине, електромагнетног зрачења се мењају континуално, као и њихова енергија. Овакви називи потичу од начина на који електромагнетни таласи одређених енергија интереагују са материјом, односно према механизму настајања. γ зрачење високе енергије настаје приликом анхилације или настајања парова честица-античестица, док је γ зрачење нешто нижих енергија способно да интереагује са најјаче везаним електронима код најтежих хемијских елемената као и са језгрима атома. Такође, настаје приликом различитих нуклеарних реакција. X зрачење се везује за интеракцију са најјаче везаним електронима свих хемијских елемената (не само најтежих). На примеру γ и X зрачења се већ види да се не може подвући јасна граница у спектру. Стога се за X зрачење сматра сво оно зрачење које може да има некакве везе са најјаче везаним (невалентним) електронима у атомима, а за γ зрачење сво оно зрачење које има некакве везе са језгрима атома. UV зрачење интереагује са валентним електронима у молекулима и атомима, укључујући могућност јонизације молекула/атома. VIS зрачење је заслужно за промену електронског стања молекула укључујући и пигментне молекуле који се налазе у људском оку

---

[21] Специјална теорија релативности се засниva на два постулата:

- Закони физике су инваријантни (идентични), у свим инерцијалним системима референце, тј. у оним системима референце који не убрзавају.
- Брзина светлости (електромагнетног зрачења) је константна за све посматраче, независно од тога да ли се извор светлости или посматрач налазе у релативном кретању.

[22] Са физичкохемијског аспекта спектроскопска подела је можда и најбитнија.

(ретини) што нам омогућава да региструјемо (видимо/доживимо) овај део спектра без посебне апаратуре. IR зрачење настаје приликом молекулских вибрација и њега такође можемо да региструјемо - као „топлоту”.[23] Микроталасно и далеко IR зрачење настаје приликом ротације молекула, док радиоталаси настају колективним осцилацијама носилаца наелектрисања у проводним материјалима (најбољи пример би биле осцилације електрона у антенама).

Оваква подела електромагнетног зрачења класификује и различите типове спектроскопија које се у многим применама заснивају на томе да се региструје интензитет апсорбованог или емитованог електромагнетног зрачења у функцији енергије (фреквенције, таласне дужине итд.). Тако нпр. могу да се разликују микроталасне, IR, блиске IR, UV-VIS, X и γ спектроскопије.[24]

За математички опис електромагнетних таласа, као и осталих врста таласа, се користи неколико устаљених величина. Уопштена репрезентација таласа (његове амплитуде у простору у функцији времена) је дата парцијалном диференцијалном једначином другог реда која је позната као таласна једначина:

$$\frac{\partial^2 u(\vec{r},t)}{\partial \vec{r}^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u(\vec{r},t)}{\partial t^2} \tag{2.9}$$

где $u(\vec{r},t)$ представља временски зависну амплитуду а v брзину таласа. У случају електромагнетних таласа $v = c$. Амплитуда таласа, у општем случају, може имати облик:

$$u(\vec{r},t) = u_1(\vec{r} - \vec{v}t) + u_2(\vec{r} + \vec{v}t) \tag{2.10}$$

чије две компоненте u_1 и u_2 описују кретање таласа у два супротна правца брзином v. Брзина пропагације таласа се назива и фазна брзина и често се означава са v_p (p од енглеске речи за фазу - phase). Амплитуда таласа у општем случају може имати изузетно компликовану зависност од положаја и времена. Три специјална случаја којима ћемо се често служити су синусоидални таласни, равни таласи и стојећи таласи.

Синусоидални таласи су представљени периодичним тригонометријским функцијама[25]. У случају једног прогресивног синусоидалног таласа, амплитуда може имати следећи облик:

$$u(\vec{r},t) = A\sin(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t + \varphi) + D \tag{2.11}$$

---

[23] Ако IR зрачење има превелик интензитет, вероватно ћемо најпре да доживимо његове последице. Такође, γ и X зрачење можемо да доживимо преко последица које изазивају на биолошким молекулима.

[24] Детаљно о великом броју спектроскопских метода на предметима: „Атомска спектрохемија”, „Молекулска спектрохемија”, „Биофизичка хемија 1”, „Физичка хемија чврстог стања”, „Физичкохемијска анализа”, „Радиохемија и нукларна хемија”.

[25] Синус (sin) и косинус (cos), а у општем случају се може користити и експоненцијални облик, односно Ојлерова формула:

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

где су A, φ и D константе, ω - угаона фреквенција која је повезана са линеарном фреквенцијом преко релације $\omega = 2\pi\nu$ и $\vec{k}$ таласни вектор који је нормалан на таласни фронт и чији је интензитет дефинисан као:

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{v_p} = \frac{2\pi\nu}{v_p} = \frac{2\pi}{v_p T} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.12}$$

па се фазна брзина може изразити и као:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \tag{2.13}$$

Поред фазне брзине, дефинише се и групна брзина (v_g) која је корисна у случају када треба да се опише пропагација групе таласа који суперпозицијом (сабирањем) дају резултујући талас. Групна брзина је дефинисана као:

$$v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} \tag{2.14}$$

<u>Задатак 2.18.</u> Доказати да се групна брзина таласа може рачунати помоћу релације 2.14.

Решење:

Узмимо случај суперпозиције два таласа описаних следећим функцијама:

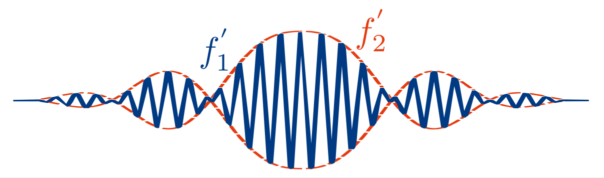
$$f_1(\vec{r},t) = \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) \quad \text{и} \quad f_2(\vec{r},t) = \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)$$

онда следи да суперпонирани талас има форму:

$$\begin{aligned} f(\vec{r},t) &= f_1(\vec{r},t) + f_2(\vec{r},t) = \cos(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t) + \cos(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t) \\ &= 2\cos\left(\frac{(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\cdot\vec{r} - (\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right)\cos\left(\frac{(\vec{k}_2 + \vec{k}_1)\cdot\vec{r} - (\omega_2 + \omega_1)t}{2}\right) \end{aligned}$$

$$f(\vec{r},t) = f_1^{'}(\vec{r},t) f_2^{'}(\vec{r},t)$$

што практично представља производ два таласа, $f_1^{'}$ и $f_2^{'}$.



Талас описан са $f_1^{'}$ је „упакован унутар таласа" $f_2^{'}$. Фазна брзина „упакованог" таласа заправо представља групну брзину суперпонираног таласа $f(\vec{r},t)$:

$$v_g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{|\vec{k}_2 - \vec{k}_1|}$$

односно у случају бесконачно малих промена (континуално диференцијални случај):

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Други специјалан случај таласа од интереса је раван талас. Као што га назив описује, равни талас је талас код кога је таласни фронт описан са равни која је нормална на правац простирања таласа. Амплитуда таласног фронта једнака у било којој тачки таласног фронта. Равни талас може да се опише једначином:

$$\Phi = Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} \tag{2.15}$$

Важно је напоменути да равни таласи могу да буду и трансферзални и лонгитудинални али да електромагнетни равни таласи морају бити трансферзални. Равни таласи су идеализација, међутим, ако се талас који се простире од тачкастог извора нађе довољно далеко од њега, његов сферни таласни фронт ће постати равни таласни фронт. Физичко поље које се понаша на овај начин, а налази се далеко од свог извора се назива далеко поље (енгл. far-field).[26]

Задатак 2.19. Показати да једначина равног таласа 2.15 задовољава таласну једначину 2.9.

Решење:

Довољно је уврстити једначину 2.15 у једначину 2.9:

$$\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(Ae^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\right)$$

и имајући у виду да је $\vec{k}\cdot\vec{r} = xk_x + yk_y + zk_z$:

$$\frac{-\omega^2}{v^2}\Phi^2 = -k_x^2\Phi^2 - k_y^2\Phi^2 - k_z^2\Phi^2$$

као и то да је интензитет таласног вектора $|\vec{k}| = k = 2\pi/\lambda$, и да се угаона фреквенција може записати као $\omega = 2\pi\nu$, добија се:

$$\left(\frac{2\pi\nu}{v}\right)^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = |\vec{k}|^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

$$\frac{2\pi\nu}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow v = \lambda\nu$$

што је довољан доказ.

---

[26] Пример равног таласа је електромагнетно зрачење које долази са Сунца на Земљу. Равни талас је добра апроксимација у овом случају с обзиром на велико растојање између Сунца и Земље чинећи чак и да се Сунце може сматрати тачкастим извором (електромагнетних) таласа.

Стојећи или стационарни таласи су таласи чија амплитуда осцилује у току времена али се положаји у којима амплитуда достиже свој максимум не померају у простору. Супротно положајима у којима амплитуда достиже максимум, постоје и тзв. чворна места код којих амплитуда једнака нули. Чворна места су такође непомична у простору. Стојећи таласи могу да се тумаче као резултат слагања два идентична таласа која се простиру у супротном смеру. Типичан пример механичког стојећег таласа је вибрирајућа жица неког жичаног инструмента.

Задатак 2.20. Извести једначину стојећег таласа, полазећи од два синусоидална таласа која се простиру у супротном смеру.
Решење:
Нека два идентична прогресивна синусоидална таласа супротних смерова узму облик:

$$f_1(\vec{r},t) = A\mathrm{sin}(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t) \quad \text{и} \quad f_2(\vec{r},t) = A\mathrm{sin}(\vec{k}\cdot\vec{r} + \omega t)$$

Односно ако се задржимо у једној димензији:

$$f_1(x,t) = A\mathrm{sin}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t\right) \quad \text{и} \quad f_2(x,t) = A\mathrm{sin}\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \omega t\right)$$

Суперпозиција ова два таласа даје:

$$\begin{aligned} f(x,t) &= f_1(x,t) + f_2(x,t) = \\ &= 2A\mathrm{sin}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)\cos(\omega t) = \\ &= A'(t)\mathrm{sin}\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

односно добија се једначина таласа чија се амплитуда мења у времену али не и положај, тј. да се ради о стојећем таласу. Ако је стојећи талас „заточен” у некаквом коначном медијуму (попут механичког таласа ограниченог унутар осцилујуће жице на неком жичаном инструменту) онда морају важити два гранична услова:

$$f(0,t) = 0$$

$$f(L,t) = A'(t)\mathrm{sin}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0$$

Други гранични услов даје могуће таласне дужине/фреквенције којима би овакав талас могао да осцилује:

$$\sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \quad \nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{2L}$$

$$\text{где} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Сви таласни, па и електромагнетни, подлежу феноменима интерференције и дифракције. **Интерференција**[27] је феномен слагања (суперпозиције или сабирања[28]) таласа у свакој тачки у простору и времену, при чему долази до стварања новог, резултујућег таласа. У општем случају нема ограничења на облик и амплитуду резултујућег таласа али се посебно наглашава случај када долази до конструктивне и деструктивне интерференције. До конструктувне и деструктивне интерференције долази када долази до слагања кохерентних таласа[29] који имају исту односно супротну фазу, респективно. **Дифракција** је одступање од праволинијског простирања таласа приликом наиласка на препреку (нетранспарентну средину за посматрани талас). Дифракција је посебно изражена уколико је препрека димензија које су реда величине таласне дужине таласа. У класичној физици, дифракција је описана Хајгенс-Френеловим (хол. Christiaan Huygens, 1629 - 1695; фра. Augustin Jean Fresnel, 1788 - 1827) принципом који гласи да свака тачка до које допре талас, односно његов таласни фронт, постаје нови извор секундарних таласа исте фреквенције и брзине и да се нови таласни фронт добија суперпозицијом новонасталих секундарних таласа. Суштински нема разлике између интерференције и дифракције, оба феномена подразумевају да долази до суперпозиције таласа. Разлика је у међусобном положају извора таласа. Код интерференције се ради о малом броју просторно раздвојених таласа, док се код дифракције ради о великом броју континуално и блиско распоређених извора таласа.

Електромагнетни таласи се могу описати и Максвеловим једначинама (енгл. James Clerk Maxwell FRSE, FRS, 1831 - 1879), односно сетом парцијалних диференцијалних једначина које описују како настају електрична и магнетна поља која се крећу брзином светлости (c) а која потичу од наелектрисаних честица које се крећу са коначним убрзањем. Максвелове једначине су заправо скуп закона из области електромагнетизма. **Прва Максвелова једначина** је Гаусов (нем. Johann Carl Friedrich Gauß, 1777 - 1855) закон за електрична поља:

$$\Phi_E = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{Q}{\epsilon_0} \tag{2.16}$$

где је приказан интегрални облик који може да се тумачи на следећи начин: укупан флукс (Φ_E) електричног поља ($\vec{E}$) кроз замишљену затворену површину (S) је једнак количнику укупног наелектрисања (Q) ограниченог том површином и диелектричне константе вакуума (ϵ_0).

---

[27] Интерференција је већ математички описана у задацима 2.18 и 2.20.

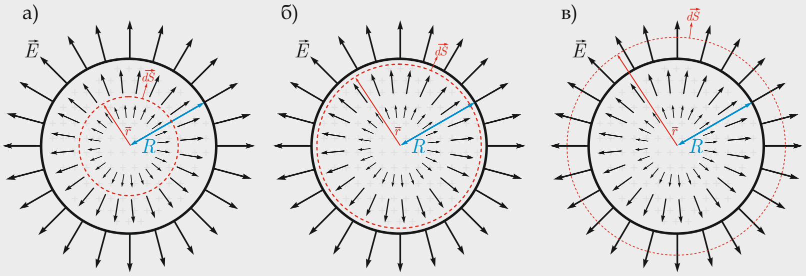
[28] Принцип суперпозиције таласа гласи да је поремећај у средини изазван од стране више различитих таласа еквивалентан поремећају изазваном од стране појединачних таласа.

[29] Кохерентни таласи су таласи који су описани истом фреквенцијом и таласном формом, односно математичким моделом. Исти математички модел не подразумева да таласи имају исту фазу јер управо разлика у фазама може да доведе до конструктивне и деструктувне интерференције. Да ли су комерцијално доступни извори светлости кохерентни?

Задатак 2.21. Пронаћи израз за електрично поље које потиче од униформно наелектрисане сфере полупречника R количином наелектрисања Q. Електрично поље представити као функцију r, растојања од центра униформно наелектрисане сфере.

Решење:

Како би се пронашла зависност $E(r)$ неопходно је применити Гаусов закон, тј. једначину 2.16. Најлакши пут је да се произвољно одабрана површина S одабере тако да представља површину сфере полупречника r, где r уједно представља текућу променљиву у односу на коју ће се интензитет електричног поља представљати.



На слици су приказана три случаја а), б) и в) у којима се мења површина S, односно повећава вредност вектора $\vec{r}$. Векторско поље електричног поља $\vec{E}$ је приказано црним стрелицама, док је елемент површине S нормалан на површину и означен са $d\vec{S}$. Сада се може применити Гаусов закон како би се дошло до зависности $E(r)$:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

С обзиром да електрично поље у овом случају има сферну симетрију, баш као и произвољно одабрана површина S, то значи да су вектори електричног поља и елемента површине $\vec{S}$ колинеарни у свакој тачки и за свако r. У том случају се може писати:

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_S E dS = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

и како је електрично поље константно на површини сваке сфере са полупречником r, лако се добија:

$$E \cdot \oiint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q(r)}{4\pi r^2 \epsilon_0} \tag{3.1}$$

Сада треба наћи зависност $Q(r)$, али с обзиром да је сфера униформно наелектрисана, то је лако:

$$\frac{Q(r)}{\text{Укупно наелектрисање}} = \frac{V(r)}{\text{Укупна запремина}}$$

$$\frac{Q(r)}{Q} = \frac{\frac{4}{3}r^3\pi}{\frac{4}{3}R^3\pi}$$

$$Q(r) = Q\frac{r^3}{R^3}$$

комбиновањем ове једначине са 3.1, добија се:

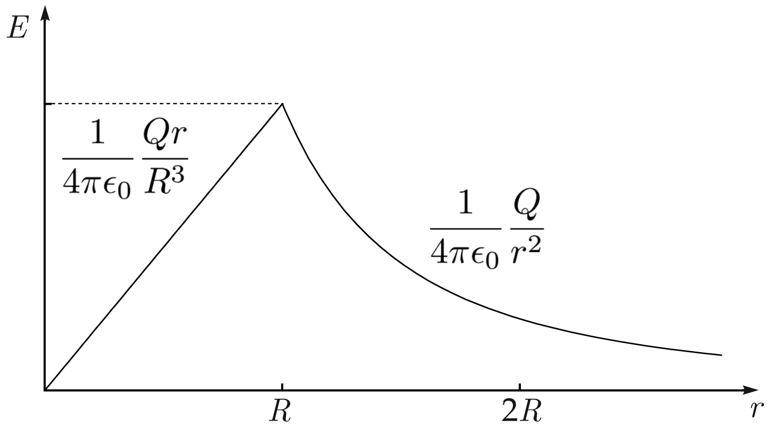
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qr}{R^3} \tag{3.2}$$

Овај резултат одговара ситуацији да докле год је сферна површина S унутар униформно наелектрисане сфере полупречника R, дакле када је $r \leq R$ (случајеви а) и б) са слике). У случају када је $r > R$ (случај в) са слике) количина наелектрисања обухваћена површином S је иста и једнака укупном наелектрисању униформно наелектрисане сфере Q, без обзира на то колика је површина S, односно колико је повећана вредност r. У том случају, у једначину 3.1 се може ставити $Q(r) = Q$, па следи:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2} \tag{3.3}$$

Добијен резултат подсећа на електрично поље тачкастог наелектрисања које се може добити из Кулоновог закона (једначина 2.6). Овим примером је и доказано да је, у простору изван сферносиметрично распоређеног наелектрисања, јачина електричног поља иста као да је сво наелектрисање сконцентрисано у центру око ког је наелектрисање распоређено.

Зависности 3.2 и 3.3 су приказане на следећем графику:



Урадити исти пример, али када је сво наелектрисање униформно распоређено на површини сфере, као што би то био случај да је у питању метална кугла. Како ће у том случају изгледати зависност $E(r)$?

Друга Максвелова једначина је Гаусов закон за магнетизам који има следећи интегрални облик:

$$\Phi_B = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \tag{2.17}$$

и математички подсећа на Гаусов закон за електрично поље али са великом суштинском разликом - укупан флукс (Φ_B) магнетног поља (E) кроз замишљену затворену површину (S) је једнак нули. Овај закон суптилно указује на то да нешто попут „магнетних наелектрисања” не постоји, односно да магнетни монополи не могу постојати те да је основни ентитет који је заслужан за појаву магнетизма **магнетни дипол**.[30]

Трећа Максвелова једначина је познатија као Максвел-Фарадејева (енгл. Michael Faraday FRS, 1791 - 1867) једначина, односно Фарадејев закон електромагнетне индукције:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \varepsilon \tag{2.18}$$

који тврди да ће свака промена у магнетном флуксу (Φ_B) у току времена кроз затворену струјну контуру (l, односно њом дефинисану површину S) индуковати електромоторну силу (ε). Знак „$-$” у једначини 2.18 указује да електромоторна сила индукује електричну струју која ствара магнетно поље усмерено супротно од магнетног поља које је узрочник електромоторне силе.[31]

<u>Задатак 2.22.</u> Магнетно поље је $\vec{B}$ усмерено према равни жице које је обликована у облику квадрата странице $a = 10$ cm као што је приказано на слици. Извор магнетног поља је перманентни магнет који се удаљава од жице па му се стога јачина магнетног поља кроз површину оивичену жицом смањује у току времена:

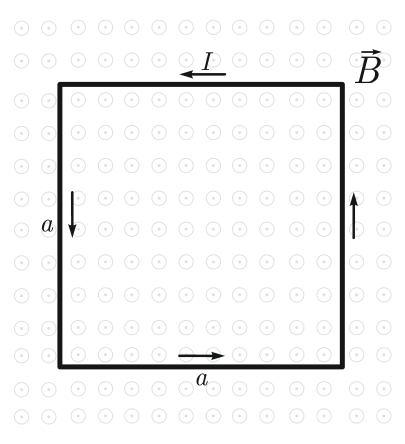
$$|\vec{B}| = 2,0 \text{ T } e^{-t/5,0 \text{ s}}$$

Удаљавањем магнета од жице се не мења облик линија сила магнетног поља у непосредној околини жице, већ само интензитет магнетног поља. Пронаћи како се струја генерисана у жици мења са временом ако је отпор жице једнак 5 Ω.

---

[30] Ово не значи да не постоје електрични диполи, мултиполи.

[31] Из средње школе познатије као Ленцово (рус. Эмилий Христианович Ленц, 1804 - 1865) правило.



Решење:
Овај проблем се лако решава коришћењем једначине 2.18 и имајући у виду да су $\vec{B}$ и $d\vec{S}$ колинеарни, као и то да је $S = a^2$:

$$-\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left[a^2 B\right] = -\frac{d}{dt}\left[a^2\ 2,0\ \mathrm{T}\ e^{-t/5,0\ \mathrm{s}}\right] = \varepsilon$$

Како је $I = \varepsilon/R$, следи:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\varepsilon(t)}{R} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{(0,1\ \mathrm{m})^2\cdot 2,0\ \mathrm{T}}{5\ \Omega}\ e^{-t/5,0\ \mathrm{s}}\right] \\ &= +\frac{(0,1\ \mathrm{m})^2\cdot 2,0\ \mathrm{T}}{5\ \Omega\cdot 5,0\ \mathrm{s}}\ e^{-t/5,0\ \mathrm{s}} \end{aligned}$$

Јединице са десне стране горње једначине у СИ систему су једнаке јединици ампер (показати), па се коначно добија:

$$I(t) = 0,8\ \mathrm{mA}\ e^{-t/5,0\ \mathrm{s}}$$

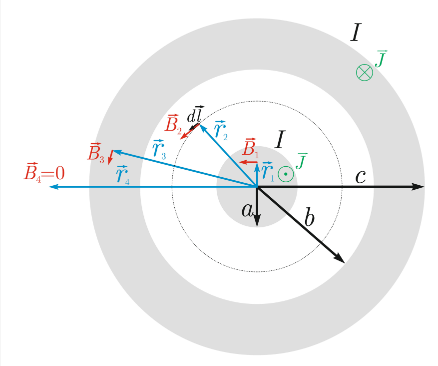
Дакле, струја у проводнику експоненцијално опада па ће након нпр. 25 s бити $\approx 5\ \mu$A.

Четврта Максвелова једначина или Ампер-Максвелова (André-Marie Ampère, 1775 - 1836) једначина је проширен Амперов закон који разматра укупне струје у проводнику уместо слободних/кондукционих струја:

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oiint_S \left(\mu_0\vec{J} + \mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \tag{2.19}$$

За слободне струје у проводницима се сматрају конвенционалне струје условљене усмереним протоком слободног наелектрисања (електрона). Укупна густина струје у једначини 2.19 има доприносе од слободне/кондукционе струје, струје магнетизације и поларизационе струје. Струја магнетизације је струја која је потребна да се флукс магнетног поља „пробије” кроз материјал и суштински постоји због коначне вредности магнетне пермеабилности (μ_0). Поларизациона струја настаје услед промене индукованих електричних диполних момената у материјалу с временом. Струја магнетизације и поларизациона струја увек имају мање доприносе у односу на слободну/кондукциону струју. Амперов закон тврди да је густина линија сила око проводника пропорционална јачини електричне струје (густине струје $\vec{J}$) која кроз тај проводник пролази и ствара исто то магнетно поље. Максвелово проширење се огледа у две ствари: (1) укупној струји су додати доприноси од магнетизације и поларизације; (2) додат је други члан подинтегралне функције са десне стране једначине 2.19 који представља неки вид закона одржања наелекрисања с обзиром да се усмереним кретањем наелектрисања (струјом) губи одређени део наелектрисања у јединици запремине.

Задатак 2.23. Кроз бесконачно дугачак проводник коаксијално смештен унутар прстенастог проводника протиче струја јачине I. Кроз прстенасти проводник такође протиче струја јачине I, али у супротном смеру. Занемарити доприносе од струје магнетизације и поларизационе струје. Попречни пресек оваквих проводника и њихов међусобни однос је дат на слици.



Пронаћи јачине магнетног поља унутар унутрашњег проводника, у региону између проводника, унутар спољашњег прстенастог проводника и ван прстенастог проводника (ван система). Сматрати да је густина струје кроз оба проводника униформна.

Решење:

Како је густина струје унутар оба проводника униформна онда се може писати:

$$J_{\text{уну.}} = \frac{I}{a^2\pi} \qquad J_{\text{спо.}} = \frac{I}{(c^2 - b^2)\pi}$$

Једначина 2.19 за потребе овог задатка узима облик:

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \oiint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} \tag{3.4}$$

У првом случају $0 < r < a$, једначина 3.4 се може записати као:

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \oiint_S \vec{J}_{\text{уну.}}\cdot d\vec{S}$$

а како су вектори $\vec{B}$ и $d\vec{l}$, као и $\vec{J}$ и $d\vec{S}$ колинеарни, онда се може писати:

$$B\oint_l dl = \mu_0 J_{\text{уну.}} \oiint_S dS = \mu_0 J_{\text{уну.}} \int_0^r rdr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$B2r\pi = \mu_0 J_{\text{уну.}} r^2\pi = \frac{\mu_0 I r^2\pi}{a^2\pi}$$

$$\text{за}\ \ 0 < r < a \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{Ir}{a^2}$$

У случају када је $a < r < b$, интегралом са десне стране једначине 3.4 је обухваћена густина струје читавог унутрашњег проводника, па се може писати:

$$B\oint_l dl = \mu_0 J_{\text{уну.}} \int_0^a rdr \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$B2r\pi = \mu_0 I$$

$$\text{за}\ \ a < r < b \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}$$

Запажа се да спољашни проводник не утиче на магнетну индукцију у региону $a < r < b$ јер интегралом са леве стране једначине 3.4 није обухваћен ни један део тог проводника.

У случају када важи $b < r < c$ магнетна поља унутрашњег и спољашњег проводника се поништавају идући од b ка c, достижући вредност нула када је $r \geq c$, с обзиром да је речено да су смерови струје у унутрашњем и спољашњем проводнику супротни. Онда се једначина 3.4 може записати као:

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \oiint_S \left(\vec{J}_{\text{уну.}} - \vec{J}_{\text{спо.}}\right)\cdot d\vec{S}$$
$$= \mu_0 \left[\oiint_S \vec{J}_{\text{уну.}}\cdot d\vec{S} - \oiint_S \vec{J}_{\text{спо.}}\cdot d\vec{S}\right]$$

и даљим сређивањем се долази до:

$$B\oint_l dl = \mu_0 \left[J_{\text{уну.}} \int_0^a rdr \int_0^{2\pi} d\varphi - J_{\text{спо.}} \int_b^r rdr \int_0^{2\pi} d\varphi\right]$$
$$= \mu_0 \left[I - \frac{I}{(c^2-b^2)\pi}(r^2-b^2)\pi\right]$$
$$= \mu_0 I\,\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}$$

$$B2r\pi = \mu_0 I \, \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

$$\text{за} \ \ b < r < c \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I(c^2 - r^2)}{r(c^2 - b^2)}$$

У последњем случају када је $r \geq c$ десна страна последње једначине постаје нула, дакле:

$$\text{за} \ \ r \geq c \quad \Rightarrow \quad B = 0$$

Оваква конструкција проводника је пример конструкције која се користи у коаксијалним кабловима као вид преносног вода за сигнале.

Сврха задатака 2.21, 2.22 и 2.23 је да се Максвелове једначине повежу са физичким законима који се изучавају у оквиру електромагнетизма у многим смеровима средњих школа.

Комбиновањем Максвелових једначина се долази до описа флуктуација електромагнетних таласа у току времена далеко ван извора поремећаја. Јачине електричног и магнетног поља, далеко од извора поремећаја, задовољавају диференцијалну једначину другог реда:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{2.20}$$

која се назива **таласна једначина**. Φ у једначини може бити јачина и електричног и магнетног поља. Свака функција која задовољава ову диференцијалну једначину представља могући талас у посматраном медијуму.[32] Ова диференцијална једначина је практично идентична једначини 2.9 која је написана за таласе у општем случају. Како електрично и магнетно поље електромагнетних таласа задовољавају диференцијалну једначину истог облика, то значи да се исто понашају у времену и простору.

---

[32] Брзина кретања таласа c дефинише о каквом се медијуму ради с обзиром да је: $c^2 = 1/\epsilon_0\mu_0$.

3 | Развој квантне теорије

Крајем 19. века, *физика* је била довољно развијена како би могла да се носи са комплексним проблемима у оквиру класичне механике, укључујући и макроскопске системе. *Термодинамика* и *кинетичка теорија* је већ била добро развијена чиме сведочи да су већ крајем 18. били конструисани први мотори са унутрашњим сагоревањем. Феномени у оквиру *оптике* су увелико објашњавани помоћу концепта електромагнетних таласа. Ипак, почетком 20. века „класичне” теорије[1] наилазе на озбиљне проблеме приликом објашњавања спектра зрачења апсолутно црног тела, фотоелектричног ефекта, Комптоновог ефетка и стабилности атома у основном (електронском) стању. Једна група истакнутих научника тог времена је веровала да одговор лежи у модификацији (или неком виду уопштавања) Максвелових једначина које заједно са Лоренцовим законом (једначина 2.7) чини основу (класичног) електромагнетизма, (класичне) оптике и основних законитости електричних струја. Развој квантне теорије је узео замах онда када су се исцрпеле могућности проширења/уопштавања класичних теорија и када се створила потреба за потпуно новим идејама. Почетак 20. века се означава као прекретница у развоју модерне физике, првенствено навођена развојем квантне теорије.

Са данашње тачке гледишта, класична физика пружа потпуно одвојен опис честица и таласа. **Честични модел** у физици подразумева да се свакој честици у простору може придружити добро дефинисана путања у простору и која се може предвидети у сваком тренутку у будућности (детерминизам) и прошлости (реверзибилност) уколико се знају почетни услови (почетни положај и брзина/импулси) и силе које делују на честицу. Дакле, познавање стања једног класичног система подразумева да се познаје положај ($\vec{r}$) и импулс ($\vec{p}$) сваке честице која чини посматрани систем.[2] Међутим, како би се дошло до еволуције стања система у времену неопходно је познавати и основни динамички закон кретања, у свом првобитном облику формулисан уз помоћ другог Њутновог закона:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \tag{3.1}$$[3]

---

[1] Данас познате као „класичне”. Тада су научницима то биле једине развијене и општеприхваћене теорије.

[2] Скуп $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_n\}$ за систем од n честица је познат као **фазни простор**. Више о овоме на предмету „Статистичка термодинамика” (*Термодинамика*?).

а касније реформулисан у апстрактним формама познатим као Лагранжова (ита. Giuseppe Luigi Lagrangia, 1736 - 1813) и Хамилтонова (Sir William Rowan Hamilton LL.D, DCL, MRIA, FRAS, 1805 - 1865) механика.

С друге стране, квантна физика/механика подразумева да се честице третирају **и као таласи** кроз концепт таласно-честичне дуалности. Овакав третман таласа и честица омогућава адекватан опис екперимената који су били нејасни класичној теорији. Таласно-честична дуалност је од централног значаја за квантну теорију заједно са принципом (квантне) суперпозиције, принципом неодређености и квантним уплитањем (енгл. entanglement). Принцип суперпозиције је принцип који се примењује на квантне објекте описане таласом са комплексном амплитудом и суштински је већ илустрован на примеру механичких таласа у задацима 2.18 и 2.20. Принцип неодређености је математички концепт који се јавља у виду компромиса због дуалног начина гледања на ствари и уводи одређена ограничења по питању информација које можемо симултано знати о једном квантном објекту. Квантно уплитање је феномен када два или више квантна објекта можемо посматрати као јединствен систем, ма колико они били просторно раздвојени, односно познавајући информације о једном објекту симултано знамо информације и о другом објекту са којим је први „уплетен”. Битно је напоменути и пробабилистичку природу квантне механике која је контрадикторна детерминистичком погледу који проистиче из класичне механике. Дакле, неки квантни објекат се може описати са више могућих стања симултано. Међутим, не може се знати у ком стању се систем заиста налази док се не изврши мерење над тим системом. Међутим, да би се мерење над неким квантним системом извршило, неопходно је имати интеркцију система са мерним инструментом. У том случају, у тренутку мерења, квантни систем и мерни инструмент постају један систем па остаје питање: „Шта се заправо мери?”.

3.1. ПЛАНКОВ ЗАКОН ЗРАЧЕЊА АПСОЛУТНО ЦРНОГ ТЕЛА (1900.)

Крајем 19. века, физичари су били немоћни да пруже класичну теорију која би могла да објасни спектар електромагнетног зрачења које потиче од апсолутно црног тела (енгл. black-body radiation). Појам апсолутно црног тела је апроксимација[4] уведена да опише материју која апсорбује сво електромагнетно зрачење (свих таласних дужина) које падне на њу. Када се апсолутно црно тело загреје на коначну температуру, оно емитује електромагнетно зрачење са карактеристичном расподелом фреквенција/таласних дужина која зависи од температуре. Планк (нем. Max Karl Ernst Ludwig Planck FRS, 1858 - 1947) је први дошао до математичког израза који адекватно описује расподелу енергије израчене од стране апсолутно црног тела

---

[3] У средњој школи углавном разматран у облику: $\vec{F} = m\vec{a}$.

[4] Нешто попут апсолутно црног тела у реалности не постоји. Дакле, ради се о идеализацији попут модела идеалног гаса или Ван дер Валсовог (Johannes Diderik van der Waals, 1837 - 1923) флуида.

у виду електромагнетног зрачења. Планк је увео претпоставку да се апсолутно црно тело на атомском нивоу може посматрати као да је сачињено од хармонијских осцилатора чија се енергија може мењати искључиво дискретно, односно апсорбовати или емитовати као целобројни (n) умножак најмање количине енергије коју са собом носи електромагнетно зрачење:

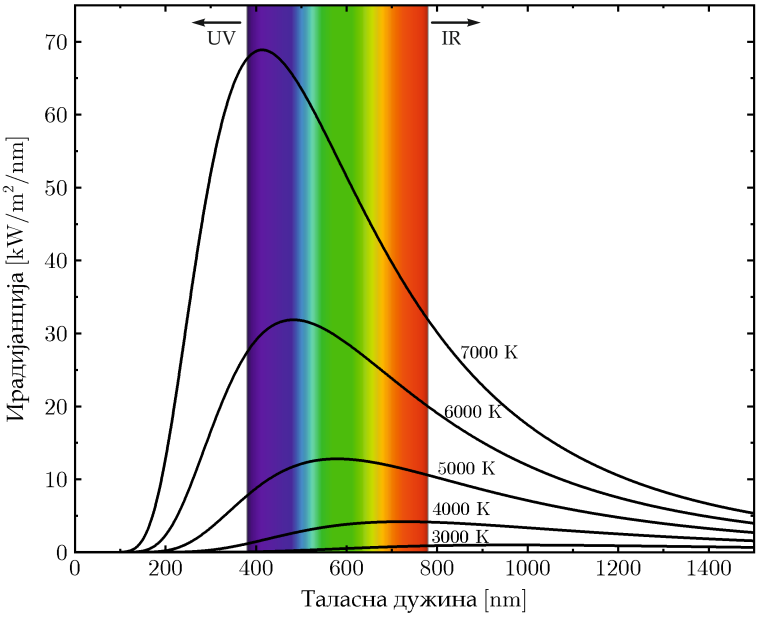
$$\Delta E = nE_0 = nh\nu = n\frac{hc}{\lambda} \tag{3.2}$$

Најмања количина енергије (квант) је пропорционална (пропорционалан) фреквенцији зрачења са константом пропорционалности која је означена са h, која се зове Планкова константа и износи $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J · s. Планкова константа представља најмање дејство које постоји у природи и због своје изузетно мале вредности се не појављује у једначинама у оквиру класичне физике. На основу ове претпоставке Планк је дошао до израза за расподелу израчене енергије у јединици времена по јединици површине и јединичној таласној дужини:

$$B_\lambda(\lambda, T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \tag{3.3}$$

Величина са леве стране једначине 3.3 се назива ирадијанција а сама једначина може узети више различитих облика. Расподела ирадијанције апсолутно црног тела за различите температуре је приказана на слици 3.1.

Слика 3.1. Ирадијанција апсолутно црног тела загрејаног на различите температуре.



Дакле, ако се неко апсолутно црно тело загреје на ≈ 3500 K, оно ће највише израчивати електромагнетне таласе које људско око перципира као црвену боју.[5] Са оваквим тумачењем спектралне расподеле апсолутно црног тела Планк уводи револуцију у физици и отвара низ нових могућности, те се стога сматра да је са овим открићем почео развој модерне физике и постављен темељ за развој квантне теорије.

Задатак 3.1. Израчунати енергију (у eV) фотона који има:

а) фреквенцију од 400 THz

б) таласну дужину од 5 μm

Којим спектроскопским спектралним областима припадају ови фотони?
Решење:
Коришћењем једначине 3.2 се долази до енергија фотона:

а) $1,654$ eV - видљиво електромагнетно зрачење

б) $0,248$ eV - инфрацрвено електромагнетно зрачење

3.2. ФОТОЕЛЕКТРИЧНИ ЕФЕКАТ - АЈНШТАЈНОВО ТУМАЧЕЊЕ (1905.)

$$h\nu = \frac{1}{2}mv^2 + A_i \tag{3.4}$$

Задатак 3.2. Одредити брзину фотоелектрона емитованих из материјала чији је излазни рад 5,6 eV који обасјава UV зрачење таласне дужине од 200 nm. Одредити максималну таласну дужину (црвену границу) која може да изазове фотоефекат у овом материјалу.
Решење:
Користећи једначину 3.4 може се доћи до брзине фотоелектрона емитованог из материјала:

$$v = \sqrt{\frac{2\left(h\nu - A_i\right)}{m}} = \sqrt{\frac{2\left(\frac{hc}{\lambda} - A_i\right)}{m}}$$

$$v = 459108\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 459,1\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

---

[5] Можда у том случају назив „апсолутно црно тело” и није прикладан.

3.3. Боров модел атома (1913.)

Ридбергова формула и спектралне серије:

$$\tilde{\nu} = R\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right) \tag{3.5}$$

Борови постулати могу бити сумирани са следећим једначинама:

$$E = T + U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Ze^2}{2r} \tag{3.6}$$

$$L = mvr = n\hbar \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.7}$$

$$\text{Дискретна стабилна стања} \quad E_1, E_2, E_3, \ldots \tag{3.8}$$

$$\Delta E = h\nu = hc\tilde{\nu} = E_n - E_k \tag{3.9}$$

Задатак 3.3. Израчунати радијус прве Борове орбите код атома водоника.

Решење:

Комбинацијом једначина 3.6 и 3.7 се долази до зависности полупречника орбите у зависности од главног квантног броја:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}\frac{n^2}{Z} = a_0\frac{n^2}{Z} \tag{3.5}$$

где је a_0 Боров радијус изражен преко фундаменталних константи и износи:

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0,529 \text{ Å}$$

За атом водоника у основном стању је $Z = 1$ и $n = 1$, па следи:

$$r_1 = a_0 = 0,529 \text{ Å}$$

Сада се може доћи до израза у коме укупна енергија из једначине 3.6 зависи од главног квантног броја:

$$E_n = -\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2}\frac{Z^2}{n^2} \tag{3.10}$$

Задатак 3.4. Израчунати вредност Ридбергове константе у cm^{-1} и eV.

Решење:

До Ридбергове константе се може доћи комбиновањем једначина 3.10

и 3.9 и поређењем са Ридберговом формулом 3.5:

$$\Delta E = hc\tilde{\nu} = |E_n| - |E_k| = \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2}\frac{Z^2}{n^2} - \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2}\frac{Z^2}{k^2}$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{hc}\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2}Z^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)$$

Одакле се види да је Ридбергова константа једнака:

$$R_\infty = \frac{1}{hc}\frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} = 109\,737,39\ \text{cm}^{-1}$$

$$R_\infty^* = hcR_\infty = \frac{me^4}{8h^2\epsilon_0^2} = 13,6057\ \text{eV}$$

<u>Задатак 3.5.</u> Израчунати полупречник и брзину електрона за прву Борову орбиту код:

а) атома H

б) јона Li^{2+}

в) јона Au^{78+}

Решење:
До полупречника орбита се може доћи коришћењем једначине 3.5 а потом и до брзина коришћењем једначине 3.7:

а) $Z = 1 \quad n = 1 \Rightarrow r_1 = a_0 \quad v_1 = 7,298 \cdot 10^{-3}c$

б) $Z = 3 \quad n = 1 \Rightarrow r_1 = \dfrac{1}{3}a_0 \quad v_1 = 2,189 \cdot 10^{-2}c$

в) $Z = 79 \quad n = 1 \Rightarrow r_1 = \dfrac{1}{79}a_0 \quad v_1 = 0,577c$

У последњем случају се види да су за третман електрона у овом (непостојећем) јону злата потребне релативистичке корекције.

<u>Задатак 3.6.</u> Израчунати полупречнике, брзине и енергије електрона за $n = 1, 2$ и 3 код атома водоника.
Решење:

$$r_n = a_0\frac{n^2}{Z} \quad v_n = \frac{n\hbar}{mr_n} \quad E_n = -R_\infty^*\frac{Z^2}{n^2}$$

$$Z = 1 \text{ и } n = 1 \Rightarrow r_1 = 0,529\ \text{Å} \quad v_1 = 7,298 \cdot 10^{-3}c \quad E_1 = -13,606\ \text{eV}$$

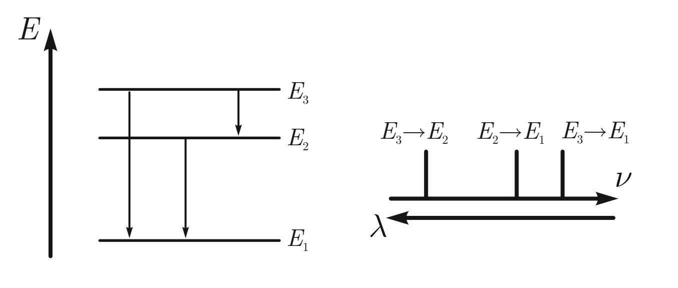
$$Z = 1 \text{ и } n = 2 \Rightarrow r_1 = 2,116\ \text{Å} \quad v_1 = 1,460 \cdot 10^{-2}c \quad E_1 = -3,402\ \text{eV}$$

$$Z = 1 \text{ и } n = 3 \Rightarrow r_1 = 4,761\ \text{Å} \quad v_1 = 2,189 \cdot 10^{-2}c \quad E_1 = -1,512\ \text{eV}$$

__Задатак 3.7.__ Скицирати енергетске нивое из претходног задатка и приказати могуће прелазе при емисији. Организовати могуће прелазе по фреквенцијама и таласним дужинама.

Решење:

Све се може сумирати на дијаграму:



__Задатак 3.8.__ Израчунати таласне дужине Лајманове-α и Балмерове-α линије за:

а) атом H

б) атом ${}^3_1$H, T

в) позитронијум $(e^+ + e_-)$

Решење:

У овом задатку се илуструје утицај масе на Ридбергову константу, односно на положај линија у спектру атома водоника и системима налик на атом водоника. Да би се ефекти узели у обзир у изразу за Ридбергову константу, уместо масе електрона, треба ставити редуковану масу система:

$$R^* = hcR = \frac{\mu e^4}{8h^2\epsilon_0^2}$$

До таласних дужина Лајманове-α и Балмерове-α линије се долази коришћењем једначине 3.5, односно:

Лајманове-α: $n = 1$ и $k = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_{L_\alpha}} = \dfrac{1}{hc}\left(R^*\dfrac{1}{1^2} - R^*\dfrac{1}{2^2}\right)$

$\Rightarrow \lambda_{L_\alpha} = \dfrac{4hc}{3R^*}$

Балмерова-α: $n = 2$ и $k = 3 \Rightarrow \dfrac{1}{\lambda_{B_\alpha}} = \dfrac{1}{hc}\left(R^*\dfrac{1}{2^2} - R^*\dfrac{1}{3^2}\right)$

$\Rightarrow \lambda_{B_\alpha} = \dfrac{36hc}{5R^*}$

Оно што се разликује код ових система је само редукована маса, односно вредност Ридбергове константе:

а) $\mu = \dfrac{m_e m_p}{m_e + m_p} = 0,99945568 m_e \Rightarrow R^* = 13,5983 \text{ eV}$

б) $\mu = \dfrac{m_e(m_p + 2m_n)}{m_e + (m_p + 2m_n)} = 0,99981866 m_e \Rightarrow R^* = 13,6032 \text{ eV}$

в) $\mu = \dfrac{m_e m_e}{m_e + m_e} = 0,5 m_e \Rightarrow R^* = 6,8029 \text{ eV}$

па ће вредности таласних дужина Лајманове-α и Балмерове-α линије бити:

а) $\lambda_{L_\alpha} = 121,568 \text{ nm} \quad \lambda_{B_\alpha} = 656,470 \text{ nm}$

б) $\lambda_{L_\alpha} = 121,525 \text{ nm} \quad \lambda_{B_\alpha} = 656,233 \text{ nm}$

в) $\lambda_{L_\alpha} = 243,003 \text{ nm} \quad \lambda_{B_\alpha} = 131,221 \text{ nm}$

Задатак 3.9. Израчунати енергије јонизације за атоме H и He$^+$.
Решење:
Да би се израчунала енергија јонизације, треба претпоставити да се уклоњен електрон налази на бесконачној удаљености од језгра па се енергија јонизације у то случају рачуна као:

$$E_J = E_\infty - E_1 = 0 - E_1 = -E_1$$

јер је

$$n = 1 \text{ и } k \to \infty \quad \Rightarrow E_\infty \to 0$$

$$E_J = -E_1 = +R^*_\infty \frac{Z^2}{1^2}$$

$$E_J(\text{H}) = 13,6057 \text{ eV} \quad \text{и} \quad E_J(\text{He}^+) = 54,4222 \text{ eV}$$

Задатак 3.10. Сателит масе 10 kg за 2 сата направи пун круг по орбити радијуса 8000 km. Користећи Боров постулат за угаони момент наћи квантни број орбите сателита.
Решење:
Из једначине 3.7 следи:

$$v = \frac{n\hbar}{mr} = \frac{2r\pi}{T} \Rightarrow n = \frac{(2r\pi)^2 m}{hT}$$

$$n = 5,3 \cdot 10^{45}$$

што практично илуструје да кретање сателита није квантирано.

3.4. Комптонов ефекат (1922/23.)

$$\lambda' - \lambda = 2\frac{h}{m_0 c} sin^2\frac{\beta}{2} = 2\lambda_C sin^2\frac{\beta}{2} \tag{3.11}$$

Задатак 3.11. Израчунати Комптонову таласну дужину, λ_C.
Решење:
Из једначине 3.11 се уочава да је Комптонова таласна дужина дефинисана преко фундаменталних константи:

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 2,426 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

односно у литератури се чешће среће вредност у ангстремима 0,02426 Å.

3.5. Таласно-честични дуализам (1924.)

$$h = \lambda p = \lambda m v \tag{3.12}$$

Детаљније на Атомистици

Задатак 3.12. Израчунати кинетичку енергију и таласну дужину електрона:

а) из задатка 3.2

б) који се креће брзином од 3000 km/s

Решење:
Користећи Де-Брољеву хипотезу:

а) $v = 459108 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow E_k = 0,5998 \text{ eV} \quad \text{и} \quad \lambda = 1,584 \text{ nm}$

б) $v = 3000000 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow E_k = 25,585 \text{ eV} \quad \text{и} \quad \lambda = 2,425 \text{ Å}$

Задатак 3.13. Колика је таласна дужина електрона убрзаног напоном од 100 V?
Решење:
Како је енергија електрона добијена у електричном пољу на разлици напона U једнака eU, онда је:

$$E = eU = E_{kin} = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = \sqrt{2meU}$$

и користећи Де-Брољеву хипотезу, следи:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2meU}}$$

$$\lambda = 1,226 \text{ Å}$$

Задатак 3.14. Упоредити таласне дужине електрона, неутрона и атома хелијума са различитим кинетичким енергијама од $0,03$, 1 и 10^4 eV.

Решење:

Слично као и у претходном задатку:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2mE_{kin}}}$$

са резултатима сумираним у следећој табели:

E_{kin} [eV]	λ [Å]		
	e^-	n_0	He
$0,03$	70,81	1,651	0,829
1	12,26	0,286	0,144
10^4	0,123	$2,860 \cdot 10^{-3}$	$1,436 \cdot 10^{-3}$

Задатак 3.15. Слободни неутрони имају време полураспада од 900 s. На којој раздаљини од извора неутронског снопа енергије 1 nm се број неутрона преполови?

Решење:

Време потребно да се број број неутрона смањи на половину почетне вредности се добија из закона радиоактивног распада:

$$\frac{dN}{N} = -kdt = -\frac{dt}{\tau}$$

$$\int_{N_0}^{N} dlnN = -\int_0^t \frac{dt}{\tau} \Rightarrow N = N_0 e^{-dt/\tau}$$

где је τ време полураспада. Када је број неутрона N једнак половини почетног броја неутрона следи:

$$N = \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow t = \tau ln2 = 623,8 \text{ s}$$

Сада се уз помоћ Де-Брољеве хипотезе лако долази до тражене раздаљине:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$v = \frac{h}{m\lambda} \Rightarrow s = vt = \frac{ht}{m\lambda} = \frac{h\tau ln2}{m\lambda}$$

$$s = 246776 \text{ m} = 246,8 \text{ km}$$

__Задатак 3.16.__ Лопта масе 300 g се креће брзином од 140 km/h. Наћи таласну дужину лопте.
Решење:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

$$\lambda = 5,679 \cdot 10^{-35}\ \mathrm{m}$$

Мала таласна дужина значи да објекат у много већој мери испољава честичне у односу на таласне особине.

Додатак

Д.1. Фундаменталне константе

Назив	Ознака	Вредност
Унификована јединица атомске масе	m_u	$1,660\,540\,2 \cdot 10^{-27}$ kg
Маса неутрона	m_n	$1,674\,928\,6 \cdot 10^{-27}$ kg
Маса протона	m_p	$1,672\,623\,1 \cdot 10^{-27}$ kg
Маса електрона	m_e	$9,108\,389\,7 \cdot 10^{-31}$ kg
Елементарно наелектрисање	e	$1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C
Планкова константа	h	$6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ J s
Болцманова константа	k	$1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ J/K
Авогадров број	N_A	$6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}
Фарадејева константа	F	$9,648\,533\,99 \cdot 10^{4}$ C/mol
Универзална гасна константа	R	$8,314\,472$ J/K mol
Гравитациона константа	γ/G	$6,672\,59 \cdot 10^{-11}$ m^3/kg s^2
Брзина светлости у вакууму	c	$299\,792\,458$ m/s
Магнетна пермеабилност вакуума	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m
Електрична пермитивност вакуума	ϵ_0	$8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12}$ F/m
Ридбергова константа	R_∞	$1,097\,373\,153\,4 \cdot 10^{7}$ m^{-1}

Списак слика

Списак табела