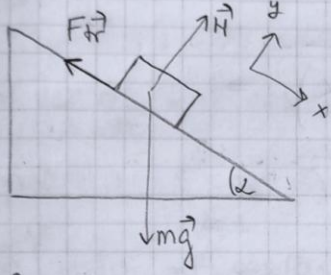


1.

Мало тело се креће низ сурну раван. Највише има d . Коэффициент трения зависи од претеног пута x као $\mu = ax$. где је a константа. Наћи пут који тело прече до заустављања и максималну брзину кретања g, α дамо тела.



$$\mu = ax$$

$$S = ?$$

$$v_{max} = ?$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \alpha - \mu N$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - mg \cos \alpha$$

$$N = mg \cos \alpha$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = m g \sin \alpha - \mu m g \cos \alpha$$

$$a_x = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$$

$$v \frac{dv}{dx} = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$v dv = g(\sin \alpha - ax \cos \alpha) dx$$

$$\int_0^v v dv = g \int_0^x (\sin \alpha - ax \cos \alpha) dx$$

$$\frac{v^2}{2} = g(\sin \alpha x - \frac{ax^2}{2} \cos \alpha)$$

$$v = \sqrt{2g(\sin \alpha x - \frac{ax^2}{2} \cos \alpha)}$$

$$* v = 0 - \text{kada se тело зауставља:}$$

$$\Rightarrow 2g(\sin \alpha x - \frac{ax^2}{2} \cos \alpha) = 0$$

$$x(2g \sin \alpha - ax \cos \alpha) = 0$$

$$x = 0 \vee 2g \sin \alpha = ax \cos \alpha$$

$$\boxed{x} = \frac{2g \sin \alpha}{a \cos \alpha} = \frac{2}{a} \tan \alpha$$

$$\frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left(\sqrt{2g(\sin \alpha x - \frac{ax^2}{2} \cos \alpha)} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2g(\sin \alpha x - \frac{ax^2}{2} \cos \alpha)}} \cdot 2g(\sin \alpha - ax \cos \alpha) = 0$$

Ekstremum funkcije kako bi se našao put za koji je brzina maksimalna.

Predmet: Fizika 1

Tip vežbi: Računske vežbe

Predmetni asistent: Violeta Stanković

Termin: Sedmi (23.4.2021)

$$g(\sin \alpha - a \cos \alpha) = 0$$

$$g \sin \alpha = g a \cos \alpha$$

$$x' = \frac{\sin \alpha}{a \cos \alpha} = \frac{1}{a} \tan \alpha$$

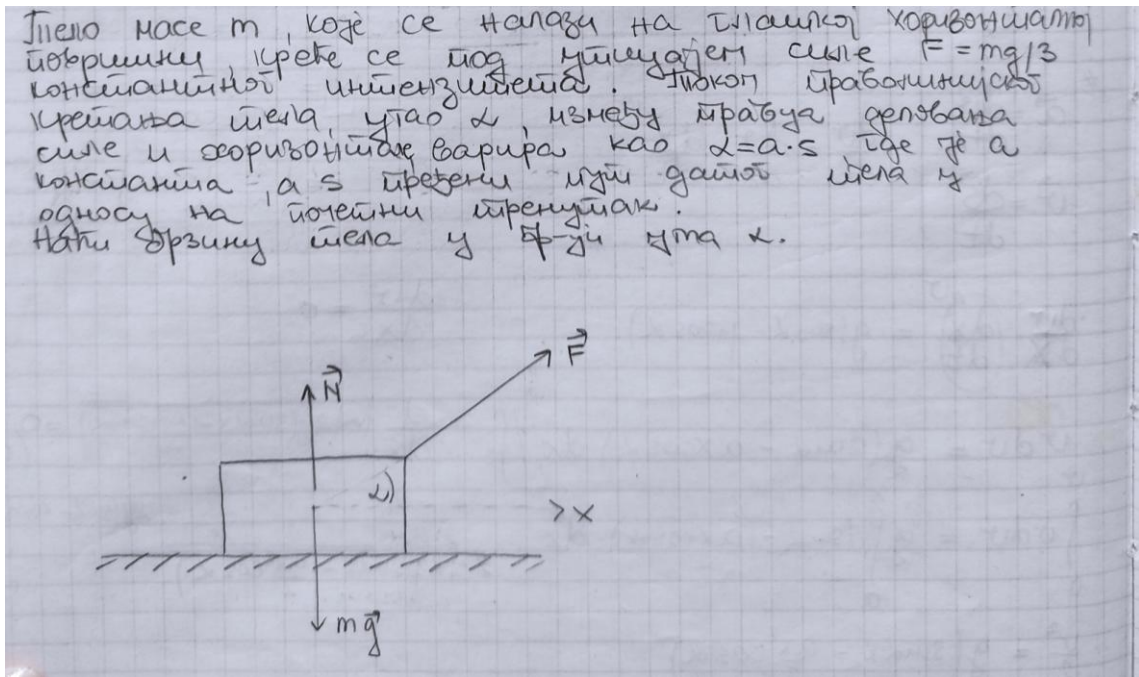
$$v_{\max} = \sqrt{2g \left(\sin \alpha \frac{1}{a} \tan \alpha - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{a^2} \tan^2 \alpha \cos \alpha \right)} =$$

$$= \sqrt{2g \left(\frac{1}{a} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} - \frac{1}{2a} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)} =$$

$$= \sqrt{2g \frac{1}{2a} \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}} =$$

$$= \sqrt{\frac{g}{a} \sin \alpha \tan \alpha}$$

2.



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F \cos \alpha = F \cos(as)$$

$$\neq \frac{d^2 x}{dt^2} = a_x$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

$$\neq$$

$$m \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = F \cos(as)$$

$$m v dv = F \cos(as) ds \quad / \int$$

$$m \int_0^v v dv = F \int_0^s \cos(as) ds$$

$$m \frac{v^2}{2} = \frac{F \sin(as)}{a}$$

$$v^2 = \frac{2F \sin(as)}{am}$$

$$v = \sqrt{\frac{2F \sin(as)}{3am}} = \sqrt{\frac{2g \sin \alpha}{3a}}$$

$$\# \quad as = t \quad \begin{array}{l} s=0; t=0 \\ s=s; t=as \end{array}$$

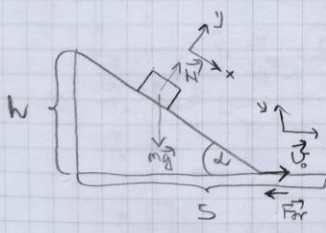
$$ds = \frac{1}{a} dt$$

$$\int_0^{\infty} \cos t \frac{dt}{a} = \frac{\sin t}{a}$$

$$\neq$$

3.

Са дрга високости h метара сагнутим се саопште
 и заустављају се с метара гачеко од протеклих
 врта дрга на хоризонталној раван. Доказати да је
 коефицијент ирета $\mu = \frac{h}{S}$.



$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \alpha - \mu N$$

$$(2) \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - mg \cos \alpha$$

$$(2) \Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$$(1) \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha$$

Primenjujemo II
 Njutnov zakon na
 telo u slučaju
 kretanja niz strmu
 ravan.

$$\frac{dx}{dt} = (g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) t$$

$$x(t) = (g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow x(T) = \frac{h}{\sin \alpha} = (g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) \frac{T^2}{2}$$

$$\neq \sin \alpha = \frac{h}{x(t)} \neq$$

$$2h = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) g \sin \alpha T^2$$

$$T^2 = \frac{2h}{g \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

$$T = \sqrt{\frac{2h}{g \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}}$$

$$v_0 = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[(g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha) \frac{t^2}{2} \right] =$$

$$= g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \cdot 2 \sqrt{\frac{2h}{g \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2hg^2 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)^2}{g \sin \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2hg (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\sin \alpha}}$$

$$(1) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu N + \cancel{mg} = -\mu \mu g + \cancel{mg}$$

$$(2) \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - mg \Rightarrow N = mg$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\mu g t + v_0$$

$$x'(t) = -\mu g \frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Uvodimo zavisnost
 visine i dužine strme
 ravni.

Ukupno vreme
 kretanja tela niz
 strmu ravan.

Početna brzina tela na
 ravnom delu puta dok je
 istovremeno krajnja brzina
 tela pri kretanju po strmoj
 ravni.

II Njutnov zakon primenjen
 na telo pri kretanju po
 ravnom delu puta.

$\frac{dx'(t)}{dt} = 0$
 $-mg\tau + U_0 = 0$
 $\tau = \frac{U_0}{mg} \Rightarrow x'(\tau) = -\sqrt{g} \frac{U_0^2}{mg^2} \frac{1}{2} + \frac{U_0^2}{mg} =$
 $= \frac{U_0^2}{2mg}$
 $s = \frac{h}{\sin \alpha} + x'(\tau) = \frac{h}{\sin \alpha} + \frac{1}{2} \frac{1}{mg} \frac{2mg(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}{\sin \alpha} =$
 $\# \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{h}{s'} \Rightarrow s' = \frac{h}{\sin \alpha} = \frac{h}{\sin \alpha} + \frac{h}{\mu} \left[1 - \mu \frac{1}{\sin \alpha} \right] =$
 $= \frac{h}{\mu}$
 $\Rightarrow \mu = \frac{h}{s}$

Put koji telo pređe kretajući se po ravnoj podlozi, do zaustavljanja.

Ukupan put koji telo pređe od početka kretanja niz strmu ravan do zaustavljanja na ravnoj podlozi.

4.

10. (Uputstvo 1.60.)
 Na slici su mase tela m_0, m_1, m_2 jednake mase kanala i kotura zanemarljive i ne utiču na kretanje u koturu. Napiši uslove a) kojim se telo mase m_0 kreće na dnu i silu zatezanja kanala koji drži tela mase m_1 i m_2 zajedno, ako je koeficijent trenja između oba tela i podloge μ .

$\# T_0 = T_1$ - neta u koturu u koturu a koturu ne utiču i mase kotura je zanemarljivo
 $\# a_0 = a_1 = a_2 = a$

Ubrzanja tela u sistemu su jednaka s obzirom na uslove zadatka (u koturu je zanemarljivo trenje, zanemarljiva je masa kotura i konac tokom kretanja ne puca).

(1) $m_0 \frac{d^2 x_0}{dt^2} = 0$

$m_0 \frac{d^2 y_0}{dt^2} = m_0 g - T_0 \quad \checkmark$

(2) $m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = T_1 - T_2 - F_{fr1} = T_1 - T_2 - \mu m_1 g \quad \checkmark$

$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = -N_1 + m_1 g \Rightarrow N_1 = m_1 g$

(3) $m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = T_2 - F_{fr2} = T_2 - \mu m_2 g \quad \checkmark$

$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = N_2 - m_2 g \Rightarrow N_2 = m_2 g$

$a [m_0 + m_1 + m_2] = m_0 g - \cancel{T_1} + \cancel{T_1} - \cancel{T_2} - \mu m_1 g + \cancel{T_2} - \mu m_2 g =$

$= g [m_0 - \mu (m_1 + m_2)]$

$\Rightarrow a = \frac{m_0 - \mu (m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2} g$

$a_2 = a$

$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = T_2 - \mu m_2 g$

$m_2 g \frac{m_0 - \mu (m_1 + m_2)}{m_0 + m_1 + m_2} = T_2 - \mu m_2 g$

$T_2 = m_2 g \left[\frac{m_0 - \mu (m_1 + m_2) + \mu m_0 + \mu m_1 + \mu m_2}{m_0 + m_1 + m_2} \right] =$

$= m_2 g \left[\frac{m_0 (1 + \mu)}{m_0 + m_1 + m_2} \right]$

Rešavanje sistema jednačina koje dobijamo primenom II Njutnovog zakona na tela u sistemu. Nepoznata od interesa u sistemu jednačina je ubrzanje sistema.

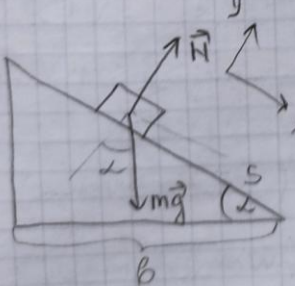
Vraćanjem vrednosti ubrzanja u bilo koju jednačinu u kojoj figuriše sila zatezanja sa indeksom „2“ dobija se tražen intenzitet sile.

5.

Неколико сипрних рабни имају задатому основу.

а) Коликн је најмд сипрне рабни спрема хоризонталу ако је време сипуштања тела до дој сипрној рабни мање него до осталим. (Размотрити случајеве када је сипрне занемарљиво и када је коефицијент сипрња $\mu = 0,25$)

б) Коликн је коефицијент сипрња ако су времена сипуштања при надику сипрне рабни за $\alpha_1 = 60^\circ$ и $\alpha_2 = 45^\circ$ једнака?



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = mg \sin \alpha - F_{fr}$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = N - mg \cos \alpha$$

$$\Rightarrow N = mg \cos \alpha$$

$F_{fr} = \mu N = \mu mg \cos \alpha$

Predmet: Fizika 1

Tip vežbi: Računske vežbe

Predmetni asistent: Violeta Stanković

Termin: Sedmi (23.4.2021)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = g \sin \alpha t - \mu g \cos \alpha t + \overset{0}{C_1}$$

$$x(t) = g \sin \alpha \frac{t^2}{2} - \mu g \cos \alpha \frac{t^2}{2} + \overset{0}{C_2} = \\ = g \frac{t^2}{2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$\left. \begin{aligned} S(t) &= x(t) \\ S &= \frac{L}{\cos \alpha} \end{aligned} \right\} \frac{L}{\cos \alpha} = \frac{g t^2}{2} (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$t^2 = \frac{2L}{g \cos \alpha (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)}$$

$$t^2 = t^2(\alpha)$$

$$t^2(\alpha_0) = \min t^2(\alpha) \Rightarrow \frac{dt^2(\alpha_0)}{d\alpha} = 0$$

Ugao za koji je vreme kretanja minimalno mora da zadovolji izraz za ekstremum funkcije.

$$\frac{dt^2}{d\alpha} = \frac{-2L[-\sin \alpha_0 (\sin \alpha_0 - \mu \cos \alpha_0) + \cos \alpha_0 (\cos \alpha_0 + \mu \sin \alpha_0)]}{g^2 \cos^2 \alpha_0 (\sin \alpha_0 - \mu \cos \alpha_0)^2} = 0$$

$$2Lg [\sin^2 \alpha_0 - \mu \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 - \mu \cos \alpha_0 \sin \alpha_0] = 0$$

$$\sin^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha_0 - 2\mu \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 = 0 \quad \bigg/ \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha_0}$$

$$\tan^2 \alpha_0 - 1 - 2\mu \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = 0$$

$$-2\mu \tan \alpha_0 = 1 - \tan^2 \alpha_0$$

$$2 \tan \alpha_0 = \left(\frac{1}{\mu} \right) (1 - \tan^2 \alpha_0)$$

$$\frac{2 \tan \alpha_0}{(1 - \tan^2 \alpha_0)} = -\frac{1}{\mu}$$

$$\# \tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \quad \#$$

$$\# \tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \quad \#$$

Predmet: Fizika 1

Tip vežbi: Računske vežbe

Predmetni asistent: Violeta Stanković

Termin: Sedmi (23.4.2021)

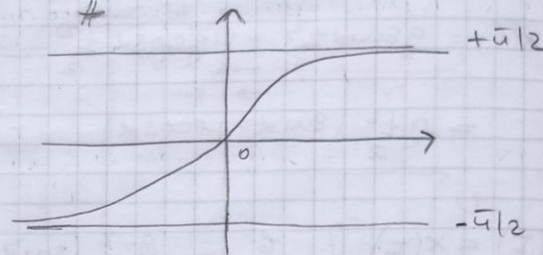
$$\tanh 2\alpha_0 = -\frac{1}{\mu}$$

$$2\alpha_0 = \operatorname{arctanh}\left(-\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2} \operatorname{arctanh}\left(-\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\alpha_0 = 45^\circ$$

$$\alpha_0 = 52^\circ$$



$$\delta) \quad \Gamma^2(\alpha_1) = \Gamma^2(\alpha_2)$$

$$\frac{\cancel{2b}}{g \cos \alpha_1 (8 \mu \alpha_1 - \mu \cos \alpha_1)} = \frac{\cancel{2b}}{g \cos \alpha_2 (8 \mu \alpha_2 - \mu \cos \alpha_2)}$$

$$\cos \alpha_1 8 \mu \alpha_1 - \mu \cos^2 \alpha_1 = \cos \alpha_2 8 \mu \alpha_2 - \mu \cos^2 \alpha_2$$

$$\mu (\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1) = \cos \alpha_2 8 \mu \alpha_2 - \cos \alpha_1 8 \mu \alpha_1$$

$$\mu = \frac{\cos \alpha_2 8 \mu \alpha_2 - \cos \alpha_1 8 \mu \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_1} = 0,267949$$

$$\# \quad t = \tanh \alpha_0$$

$$t^2 - 2\mu t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 + 4}}{2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 1}$$

1°

$$\Rightarrow t_1 = \mu + \sqrt{\mu^2 + 1} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{1 + \sqrt{17}}{4} = 52^\circ$$

$$2^\circ \quad \mu = 0$$

$$t = 0 + \sqrt{0 + 1} = 1$$

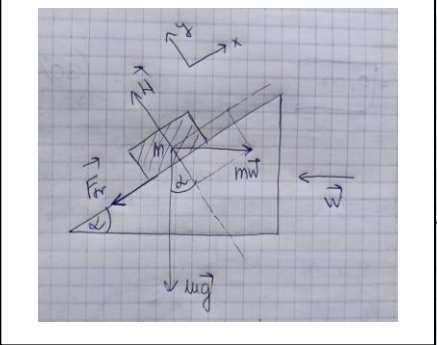
$$\tanh \alpha_0 = 1$$

$$\alpha_0 = \operatorname{arctanh} 1 = \frac{\pi}{4}$$

t_2 - tuje fiziku možete pomeniti
sep se govori relativističan ugao α_0

6.

Prizma na kojoj se nalazi pločica mase m se kreće po horizontalnoj podlozi ubrzanjem w . Količina je navedena vrednost w za koju je pločica ostala neokrenuta u odnosu na prizmu ako se zna da je koeficijent trenja između njih $\mu < \tan \alpha$.



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin \alpha - \mu H + m w \cos \alpha$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \cos \alpha + H - m w \sin \alpha$$

$$H = m(g \cos \alpha + w \sin \alpha)$$

$$F_{tr} \leq \mu H$$

$$F_{tr} \leq \mu m(g \cos \alpha + w \sin \alpha)$$

$$\Rightarrow m(w \cos \alpha - g \sin \alpha) \leq \mu m(g \cos \alpha + w \sin \alpha)$$

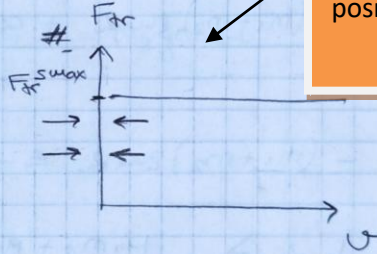
$$w \cos \alpha - g \sin \alpha \leq \mu g \cos \alpha + \mu w \sin \alpha$$

Uzeti u obzir da se kreće prizma na kojoj se nalazi pločica. Datu inercijalnu silu projektovati na ose sistema u odnosu na koji se posmatra kretanje pločice na prizmi.

$$w \cos \alpha - \mu w \sin \alpha \leq \mu g \cos \alpha + g \sin \alpha$$

$$w(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \leq g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$w \leq \frac{g(\mu \cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow w \leq \frac{g(\mu \tan \alpha + 1)}{\tan \alpha - \mu}$$


Da bi došlo do kretanja tela vrednost sile trenja mora da dosegne maksimalnu vrednost koja je manja ili jednaka proizvodu koeficijenta trenja i normalne sile koja deluje na posmatrano telo.