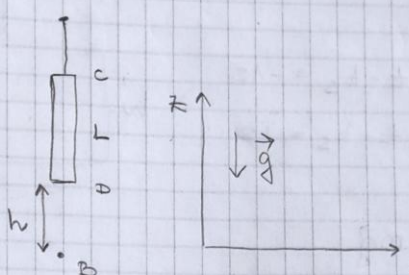


1.

Lenjir A dužine 25 cm obješen je od otvora konure B. Taj otvor se nalazi na visini h nad otvorom B. Nakon što se lenjir A otpusti, on će pasti i pasti će ga otvor B. Koliko će visina h biti, ako se otvor B nalazi na visini 0,15 m od lenjira A, kada se otpusti lenjir A?

$L = 25 \text{ cm}$
 $\Delta t = 0,15 \text{ s}$
 $h = ?$



$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g}$
 $m \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z = -mg \vec{e}_z$
 $\frac{d^2 z}{dt^2} = -g \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -gt + C_1$
 $z_D(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_2 = -\frac{gt^2}{2} + h$
 $z_C(t) = -\frac{gt^2}{2} + h + L$

Položaj D tačke
Položaj C tačke

$z_D(t_1) = 0 = -\frac{1}{2} g t_1^2 + h$
 $\Rightarrow t_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}}$
 $t_1 = +\sqrt{\frac{2h}{g}}$
 $z_C(t_2) = 0 = -\frac{1}{2} g t_2^2 + h + L$
 $\Rightarrow t_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{2(h+L)}{g}}$
 $t_2 = t_1 + \Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \Delta t$
 $t_2 = \sqrt{\frac{2(h+L)}{g}}$

Vreme potrebno tački D lenjira da se nađe iznad otvora
Vreme potrebno tački C lenjira da se nađe iznad otvora na zidu izraženo na dva načina.

$\Rightarrow \sqrt{\frac{2(h+L)}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \Delta t$
 $\frac{2(h+L)}{g} = \frac{2h}{g} + 2\Delta t \sqrt{\frac{2h}{g}} + \Delta t^2$
 $\frac{2h}{g} + \frac{2L}{g} = \frac{2h}{g} + 2\Delta t \sqrt{\frac{2h}{g}} + \Delta t^2$
 $\frac{2L}{g} - \Delta t^2 = 2\Delta t \sqrt{\frac{2h}{g}}$
 $\sqrt{h} = \frac{\frac{2L}{g} - \Delta t^2}{2\Delta t \sqrt{\frac{2}{g}}} \Rightarrow h = \frac{g}{2} \left[\frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{2L}{g} - \Delta t^2 \right) \right]^2 \approx 0,206 \text{ m}$

Izjednačavanje dva izraza za vreme koje je potrebno tački lenjira C da se nađe iznad otvora u zidu (u cilju nalaženja tražene visine)

2.

Koju brzinom treba dati telo vertikalno naniže sa visine $h=40\text{ m}$ da bi ono palo na zemlju:

a) za 1 s ranije nego u slučaju slobodnog pada
 b) za 1 s kasnije

Vreme kretanja tela u slučaju slobodnog pada

$h=40\text{ m}$

a) $\Delta t_s = t - t_s = -1\text{ s}$
 b) $\Delta t_s = t - t_s = 1\text{ s}$

$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g}$

$m \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z = -mg \vec{e}_z$

$\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -gt + v_0$

$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + C_1$

$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h$

$z(t) = 0 = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + h$

$\frac{gt^2}{2} - v_0 t - h = 0$

$t_{1,2} = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$

$t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$

$\Delta t = t - t_s = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} - \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\Delta t g = v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh} - g \sqrt{\frac{2h}{g}}$

$g(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}}) - v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh} \quad | \textcircled{2}$

Primena Drugog Njutnovog zakona na dato telo kako bismo dobili komponente radijus vektora tela u svakom trenutku vremena.

Ukupno vreme kretanja tela (iskoristili smo činjenicu da je z koordinata kada telo padne na Zemlju zapravo nula)

Vremenski interval koji predstavlja razliku ukupnog vremena kretanja tela i vremena koje je potrebno telu da pri slobodnom padu padne na Zemlju.

nađogati Δt :

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg$$

$$\ddot{z} = -g$$

$$\dot{z} = -gt + C_1$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + C_2$$

$$\boxed{z(t) = -\frac{gt^2}{2} + h}$$

$$-\frac{gt^2}{2} = -h$$

$$t^2 = \frac{2h}{g}$$

$$t = \pm \sqrt{\frac{2h}{g}} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$$

#

$$g^2 \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 - 2gU_0 \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) + U_0^2 = U_0^2 + 2gh$$

$$2gU_0 \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right) = g^2 \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 - 2gh$$

$$U_0 = \frac{1}{\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}}} \left[\frac{1}{2g} \left(2g^2 \left(\frac{g}{2} \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 - h \right) \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}}} \left[\frac{g}{2} \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)^2 - h \right] =$$

$$= -\frac{h}{\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}}} + \frac{g}{2} \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)$$

$$\boxed{U_0 = -\frac{h}{\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}}} + \frac{g}{2} \left(\Delta t + \sqrt{\frac{2h}{g}} \right)}$$

Zameniti sve vrednosti u jednačinu za Δt

Vreme potrebno telu u slučaju slobodnog pada

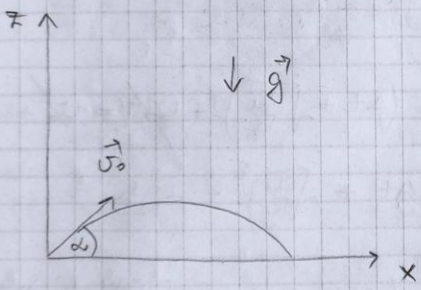
Postoje dva rešenja:

1. $V_0 = -12.43$ m/s gde je predznak „-“ jer je telo potrebno gurnuti u smeru suprotnom od smera z ose sistema u odnosu na koji posmatramo kretanje.
2. $V_0 = +8.5$ m/s gde je predznak „+“ jer je prvo potrebno telo baciti vertikalno naviše datom brzinom kako bi palo 1s nakon pada istog pri slobodnom padu

3.

Тело је бацено са Земље под углом α брзином u_0 . Занапуштајући хоризонталну почетном брзином $u_0 \cos \alpha$, занапуштајући оштар ваздуха одређивај:

- време кретања
- максималну висину до које се тело узне и домет;
- угол α за који су те две величине једнаке
- ј-ну параметризује $z(x)$



$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g}$
 $z: \frac{d^2 z}{dt^2} = -g$
 $\frac{dz}{dt} = -gt + C_1$
 $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + u_0 \sin \alpha t + C_2$

$x: \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$
 $\frac{dx}{dt} = C_1 = u_0 \cos \alpha$
 $x(t) = u_0 \cos \alpha t + C_1$

$a) z(t) = 0 = -\frac{gt^2}{2} + u_0 \sin \alpha t$
 $t \left(-\frac{g}{2} t + u_0 \sin \alpha \right) = 0$
 $\Rightarrow t = 0 \quad \vee \quad t = \frac{2 u_0 \sin \alpha}{g}$

Uzimamo nenulto vreme kretanja tela jer drugo rešenje nema fizički smisao.

Domet tela je zapravo x komponenta kretanja tela u zavisnosti od ukupnog vremena kretanja tela.

d) $z_{\max} = ?$ $t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$

$$\frac{dz(t_1)}{dt_1} = 0$$

$$-gt_1 + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$z_{\max}(t_1) = -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} =$$

$$= -\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$$

$$d = x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot 2 v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$z_{\max} = d$

$$\frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$$

$$\sin^2 \alpha = 2 \sin 2\alpha$$

$$\sin^2 \alpha = 2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 4$$

$$\tan \alpha = 4$$

$$\alpha = \arctan 4 = 75,963^\circ$$

namjeravamo pogledati gdje će biti maksimum $\sin 2\alpha = 1$ tj. $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ $\alpha = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{d(d)}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{v_0^2}{g} \cos 2\alpha \cdot 2 = 0$$

$$\cos 2\alpha = 1$$

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \#$$

e) $x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$

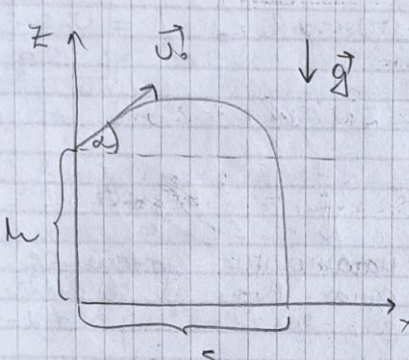
$$z(x) = -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} =$$

$$= -\frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x$$

Maksimalni domet možemo da dobijemo i kada nađemo uslov za ekstremum funkcije tj dometa.

4.

Камен бацан са висине $h=2,1\text{ m}$ изнад површине Земље, под углом $\alpha=45^\circ$ према хоризонту, пао је на Земљу на растојању $s=42\text{ m}$ од места бацања. Игнорисајући хоризонталне координате, колико је брзином бацан камен? Колико је времена лета и до које се максималне висине доио?



$h = 2,1\text{ m}$
 $\alpha = 45^\circ$
 $s = 42\text{ m}$
 $v_0 = ?$
 $T = ?$

$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g}$
 $z: \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -gt + v_{0z}$
 $x: \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_{0x}$

$\frac{dz}{dt} = -gt + v_0 \sin \alpha$
 $z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t + C_1$
 $\frac{dx}{dt} = C_2 = v_0 \cos \alpha$
 $x(t) = v_0 \cos \alpha t + C_3$
 $x(t) = v_0 \cos \alpha t$

$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha t + h$

$z(T) = 0 = -\frac{gT^2}{2} + v_0 \sin \alpha T + h$
 $\frac{gT^2}{2} - v_0 \sin \alpha T - h = 0$
 $T_{1,2} = \frac{v_0 \sin \alpha \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$
 $T = 3\text{ s}$

Projekcija vektora početne brzine tela na z osu sistema u odnosu na koji posmatramo kretanje.

Projekcija vektora početne brzine tela na x osu sistema u odnosu na koji posmatramo kretanje.

Domet tela koji nam je poznat podatak koji koristimo kako bismo našli vrednost početne brzine tela.

$$s(t) = x(t) = v_0 \cos \alpha \left(\frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} \right)$$

$$g s(t) = v_0^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha + v_0 \cos \alpha \left(\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \right)$$

$$g s(t) - v_0^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha = v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \quad | \textcircled{2}$$

$$g^2 s^2(t) - 2g s(t) v_0^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha + v_0^4 \cos^4 \alpha \sin^2 \alpha = v_0^4 \cos^2 \alpha (v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh)$$

$$g^2 s^2(t) - 2g s(t) v_0^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha + v_0^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = v_0^4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 2v_0^2 \cos^2 \alpha gh$$

$$g^2 s^2(t) = v_0^2 [2 \cos^2 \alpha gh + 2g s(t) \cos^2 \alpha \sin \alpha]$$

$$v_0^2 = \frac{g^2 s^2(t)}{2g [\cos^2 \alpha h + s(t) \cos^2 \alpha \sin \alpha]}$$

$$v_0 = \frac{s}{2 \cos \alpha} \sqrt{\frac{2g}{h + s(t) \tan \alpha}}$$

$$v_0 = 13,798 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\frac{dz(t')}{dt} = 0$$

$$-gt' + v_0 \sin \alpha = 0$$

$$t' = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$$

Vreme potrebno telu da dostigne maksimalnu visinu.

$$h_{\max} = z(t') = -\frac{g}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g^2} + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} + h =$$

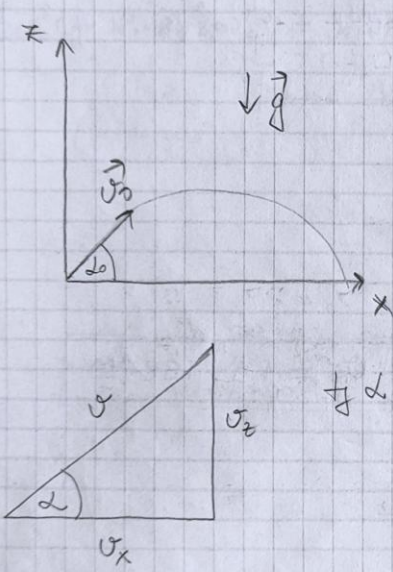
$$= h + \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 12,09 \text{ m}$$

5.

Плохо је датено под углом од 60° према хоризонту,
брзином $v_0 = 20 \text{ m/s}$.

а) Под којим ће се углом α према хоризонту
кретањем ипо после $1,5 \text{ s}$ и после $2,5 \text{ s}$ од
почетка кретања?

б) После којих времена и на којој висини ће се
оно кретањем под углом од 45° у односу на
хоризонт?



а) $t_1 = 1,5 \text{ s}$
 $t_2 = 2,5 \text{ s}$
 $\alpha = ?$

$$\tan \alpha = \frac{v_z}{v_x} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-gt + v_0 \sin \alpha_0}{v_0 \cos \alpha_0}$$

$$= -\frac{gt}{v_0 \cos \alpha_0} + \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha_0} = -\frac{gt}{v_0 \cos \alpha_0} + \tan \alpha_0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \arctan \left(-\frac{g}{v_0 \cos \alpha_0} t_1 + \tan \alpha_0 \right) = 14,68^\circ$$

$$\alpha_2 = -35,67^\circ$$

$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = m \vec{g} \mid \vec{e}_x, \vec{e}_z$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + C$$

$$z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin \alpha_0 t$$

$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0$

$$\frac{dx}{dt} = C_2$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha_0 t + C_3$$

$$\delta) \quad \alpha = 45^\circ$$

$$\frac{1}{2} \alpha = - \frac{gt}{v_0 \cos \alpha_0} + \frac{1}{2} \alpha_0$$

$$\frac{gt}{v_0 \cos \alpha_0} = \frac{1}{2} \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha$$

$$t = \frac{v_0 \cos \alpha_0}{g} \left(\frac{1}{2} \alpha_0 - \frac{1}{2} \alpha \right) = 0,746 \text{ s}$$

$$h = z(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 \sin \alpha_0 t = 10,20 \text{ m}$$

Vreme
potrebno telu
da dostigne
zadati ugao
kretanja tela