Za rešavanje zadataka potrebno je koristiti formule i tabele date na trećem predavanju.

1. U toku vežbe na predmetu Opšti kurs fizičke hemije, student je imao zadatak da piknometrom izmeri gustinu rastvora. Merenje gustine rastvora je ponovljeno deset puta i dobijene su sledeće vrednosti (u gcm^{-3}):

1,06	1,12	1,15	1,06	1,03	1,09	1,22	1,08	1,13	1,02

Izračunati srednju vrednost, standardnu devijaciju, relativnu standardnu devijaciju, modu, opseg merenja, varijansu i medijanu.

Srednja vrednost:

$$\bar{X} = \frac{1{,}06 + 1{,}12 + 1{,}15 + \cdots + 1{,}02}{10} gcm^{-3} = 1{,}096\ gcm^{-3}$$

*prilikom izračunavanja veličina uvek ostavite veći broj značajnih cifara od broja koji bi trebalo poštujući pravila o broju značajnih cifara prema računskim operacijama. Zaokruživanje brojeva u svakom koraku dodatno povećava nesigurnost merenja.

Standardna devijacija

$$s = \sqrt{\frac{(1{,}06 - 1{,}096)^2 + (1{,}12 - 1{,}096)^2 + \cdots + (1{,}02 - 1{,}096)^2}{10 - 1}} = 0{,}0606\ gcm^{-3}$$

Relativna standardna devijacija:

$$s_R = \frac{s}{\bar{X}} \cdot 100\% = \frac{0{,}0606\ gcm^{-3}}{1096\ gcm^{-3}} \cdot 100\% = 5{,}528\%$$

Moda:

1,06 – vrednost koja se najćešće pojavljuje

Opseg merenja:

$$opseg = x_{max} - x_{min} = 1{,}22\ gcm^{-3} - 1{,}02\ gcm^{-3} = 0{,}20\ gcm^{-3}$$

Varijansa:

$$s^2 = 0{,}003671\ g^2cm^{-6}$$

Medijana:

1,02 1,03 1,06 1,06 1,08 1,09 1,12 1,13 1,15 1,22

Srednje vrednosti niza su 1,08 i 1,09.

$$medijana = \frac{1{,}08 + 1{,}09}{2} gcm^{-3} = 1{,}085\ gcm^{-3} \approx 1{,}08\ gcm^{-3}$$

2. Na osnovu rezultata iz prethodnog merenja gustine rastvora piknometrom pokazati Grubbs-ovim testom da li je moguće isključiti vrednost 1,22 gcm^{-3} sa nivoom pouzdanosti od 95%.

$$G_{exp} = \frac{|X_{upitno} - \bar{X}|}{s} = \frac{1,22\ gcm^{-3} - 1,096\ gcm^{-3}}{0,0606\ gcm^{-3}} = 2,04\ gcm^{-3}$$

Na osnovu tablice za 10 merenja, odnosno 9 stepeni slobode, kritična vrednost G iznosi 2,110, što je veće od eksperimentalne vrednosti tako da je moguće ovu upitnu vrednost zadržati.

3. Na osnovu rezultata iz prethodnog merenja gustine rastvora piknometrom pokazati Dioxon-ovim testom da li je moguće isključiti vrednost 1,22 gcm^{-3} sa nivoom pouzdanosti od 95%. Da li je na osnovu istog testa moguće isključiti vrednost 1,02 gcm^{-3}.

$$Q = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_1} = \frac{1,22\ gcm^{-3} - 1,15\ gcm^{-3}}{1,22\ gcm^{-3} - 1,02\ gcm^{-3}} = 0,35$$

Za deset merenja, kritična vrednost Q je 0,466 tako da je moguće zadržati upitnu vrednost.

$$Q = \frac{X_2 - X_1}{X_n - X_1} = \frac{1,03\ gcm^{-3} - 1,02\ gcm^{-3}}{1,22\ gcm^{-3} - 1,02\ gcm^{-3}} = 0,05$$

Kao što je prethodno rečeno, kritična vrednost Q je 0,466, tako da je moguće zadržati i ovu upitnu vrednost.

4. Za merenje gustine rastvora piknometrom izračunati opseg sa intervalom pouzdanosti od 50, 90 i 95%.

$$\mu(50\%) = \bar{X} \pm \frac{ts}{\sqrt{n}} = \left(1,096 \pm \frac{0,703 \cdot 0,0606}{\sqrt{10}}\right) gcm^{-3} = (1,096 \pm 0,01347) gcm^{-3}$$
$$= (1,10 \pm 0,02)\ gcm^{-3}$$

*rezultate za opseg merenja zaokružiti prema pravilima o zaokruživanju. Posmatra se greška merenja s leva na desno i prva cifra različita od nule se zaokružuje na veću ukoliko se posle nje nalazi bilo koji broj koji je različit od nule. Ukoliko su posle ovog broja samo nule onda broj ostaje isti. Na osnovu položaja ove cifre određujemo poslednju značajnu cifru u rezultatu i nju zaokružujemo prema pravilima o zaokruživanju.

$$\mu(90\%) = \bar{X} \pm \frac{ts}{\sqrt{n}} = \left(1,096 \pm \frac{1,833 \cdot 0,0606}{\sqrt{10}}\right) gcm^{-3} = (1,096 \pm 0,0351)\ gcm^{-3}$$
$$= (1,10 \pm 0,04)\ gcm^{-3}$$

$$\mu(95\%) = \bar{X} \pm \frac{ts}{\sqrt{n}} = \left(1,096 \pm \frac{2,262 \cdot 0,0606}{\sqrt{10}}\right)\ gcm^{-3} = (1,096 \pm 0,0433)\ gcm^{-3}$$
$$= (1,10 \pm 0,05)\ gcm^{-3}$$

5. Većim brojem merenja tokom godina izračunato je da je standardna devijacija svih merenja gustine datog rastvora piknometrom 0,05 gcm^{-3}. Pokazati F-testom da li između merenja i populacije postoji statistički značajna razlika.

*kod korišćenja F-testa važno je prvo uporediti standardne devijacije ili varijanse uzorka i populacije. U primeru je standardna devijacija merenja veća od standardne devijacije populacije. Kritična vrednost F se nalazi u tablici tako što se broj stepeni slobode kada je standardna devijacija merenja veća od standardne devijacije populacije očitava u prvoj koloni i u preseku sa redom koji počinje beskonačnim brojem merenja, što je u datom primeru 2,114.

$$F_{exp} = \frac{0{,}003671\ g^2cm^{-6}}{(0{,}05\ gcm^{-3})^2} = 1{,}468$$

Na osnovu poređenja izračunate i tablične vrednosti moguće je zaključiti da ne postoji statistički značajna razlika između datog merenja i populacije.

6. Ukoliko je na pakovanju ispitivanog rastvora pisalo da je gustina 1,16 gcm^{-3} pokazati da li postoji statistički značajna razlika sa nivoom pouzdanosti od 95% između ove vrednosti i srednje vrednosti merenja.

$$t_{exp} = \frac{|\mu - \bar{X}|}{s}\sqrt{n} = \frac{1{,}16\ gcm^{-3} - 1{,}096\ gcm^{-3}}{0{,}0606\ gcm^{-3}}\sqrt{10} = 3{,}340$$

Za nivo pouzdanosti od 95% krtična vrednost t je već prikazana u četvrtom zadatku i iznosi 2,262. Poređenjem ove dve vrednosti moguće je zaključiti da između dva merenja postoji statistički značajna razlika.

7. Drugi student je ponovio merenje i dobio sledeći skup vrednosti (u gcm^{-3}):

1,18	1,16	1,20	1,25	1,15	1,13	1,28	1,16	1,13	1,55

Pokazati da li postoji statistički značajna razlika između dva merenja ukoliko se uporede srednje vrednosti merenja.

$$\bar{X} = \frac{1{,}18 + 1{,}16 + 1{,}20 + \cdots + 1{,}55}{10} gcm^{-3} = 1{,}219\ gcm^{-3}$$

$$s = 0{,}1263\ gcm^{-3}$$

$$s^2 = 0{,}0160\ g^2cm^{-6}$$

$$s_{zajedničko} = \sqrt{\frac{s_1^2(n_1 - 1) + s_2^2(n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}},$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}003671\ g^2cm^{-6}(10 - 1) + 0{,}0160\ g^2cm^{-6}(10 - 1)}{10 + 10 - 2}} = 0{,}09917\ gcm^{-3}$$

$$t_{exp} = \frac{|\bar{X}_1 - \bar{X}_2|}{s_{zajedničko}}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} = \frac{1{,}219 - 1{,}096}{0{,}09917}\sqrt{\frac{10 \cdot 10}{10 + 10}} = 2{,}773$$

*prilikom poređenja dve srednje vrednosti broj stepeni slobode predstavlja zbir merenja minus dva. Kritična vrednost za 18 stepeni slobode za nivo poverenja od 95% iznosi 2,086. Vrednost je procenjena na osnovu najbliže vrednosti iz tabele (što je u ovom slučaju 20).

Poređenjem kritične i eksperimentalne t vrednosti moguće je zaključiti da između ovih merenja postoje statistički značajne razlike.

8. Pokazati da li postoji statistički značajna razlika između merenja dvoje studenata ukoliko se uporede varijanse.

*kao i kod korišćenja F-testa za poređenje varijansi merenja i populacije, tako je i u ovom slučaju potrebno uporediti prvo vrednost dve varijanse. Varijansa drugog merenja je veća tako da će broj stepeni slobode ovog merenja biti pročitan iz prvog reda a broj stepeni slobode prvog iz prve kolone. U ovom primeru oni identični, tako da je kritična vrednost F 4,026.

$$F_{exp} = \frac{{s_2}^2}{{s_1}^2} = \frac{0{,}0160 \ g^2cm^{-6}}{0{,}00367 \ g^2cm^{-6}} = 4{,}35$$

što je veće od tablične vrednosti tako da su ova dva merenja statistički različita na osnovu poređenja varijansi.