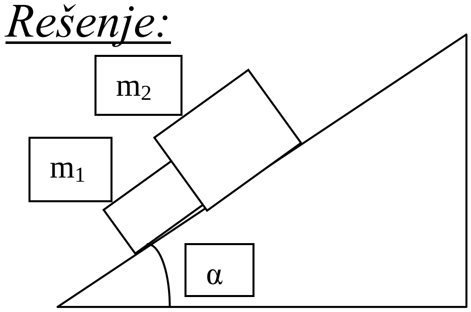
Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

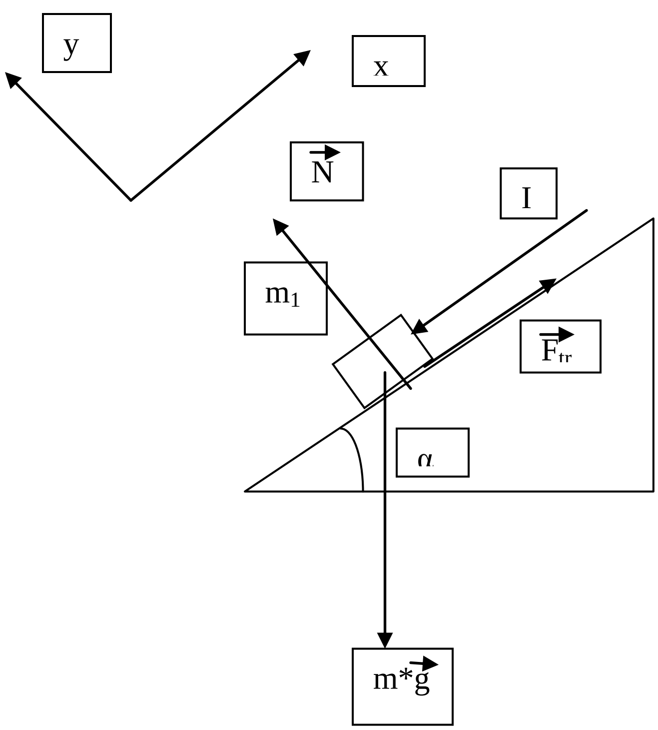
Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

1. **Na strmu ravan nagiba α postavljene su jedna uz drugu dve ploče. Mase ploča su m_1 i m_2, a koeficijenti trenja između ploča i podloge su μ_1 i μ_2 ($\mu_1 > \mu_2$). Odrediti:**
   a) Silu interakcije ploča u kretanju
   b) Minimalnu vrednost ugla α pri kojoj počinje klizanje

__Rešenje:__



I=?



Primenom Drugog Njutnovog zakona na telo mase m_1, sve sile koje deluju na telo projektuju se na dve ose dekartovog sistema (u odnosu na koji posmatramo kretanje). Identičan postupak se primenjuje na drugo telo datog sistema.

$m_1 ; m_2$

$\mu_1 ; \mu_2 \; (\mu_1 > \mu_2)$

$I = ?$

$$(1) \quad m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -m_1 g \sin\alpha + \underbrace{\mu_1 N}_{\mu_1 mg\cos\alpha} - I$$

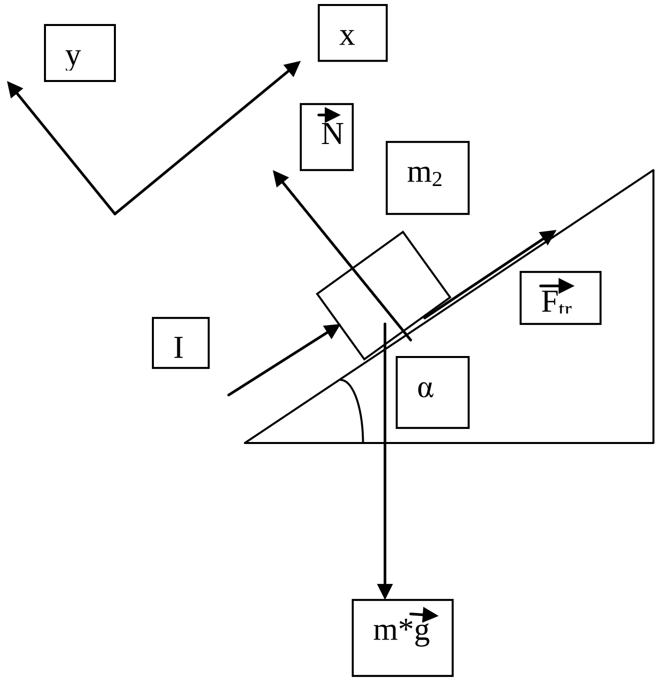
$$m\underbrace{\frac{d^2y_1}{dt^2}}_{0} = N - mg\cos\alpha \Rightarrow N = mg\cos\alpha$$

Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković



$$\mu_2 m_2 g\cos\alpha$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_2 g\sin\alpha + \mu_2 N + I$$

$$\overbrace{m_2\frac{d^2y_2}{dt^2}}^{=0} = N - m_2 g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow N = m_2 g\cos\alpha$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + L \quad \Big/ \frac{d^2}{dt^2}$$

$$\cancel{-\frac{m_1 g\sin\alpha}{m_1}} + \frac{\mu_1 \cancel{m_1} g\cos\alpha}{\cancel{m_1}} - \frac{I}{m_1} = \cancel{-\frac{m_2 g\sin\alpha}{m_2}} + \frac{\mu_2 \cancel{m_2} g\cos\alpha}{\cancel{m_2}} + \frac{I}{m_2}$$

$$\mu_1 g\cos\alpha - \frac{I}{m_1} = \mu_2 g\cos\alpha + \frac{I}{m_2}$$

$$-I\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right) = \mu_2 g\cos\alpha - \mu_1 g\cos\alpha$$

$$I\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right) = g\cos\alpha\,(\mu_1-\mu_2)$$

$$\boxed{I = \frac{g\cos\alpha\,(\mu_1-\mu_2)}{\left(\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}\right)}}$$

Da bismo došlido tražene sile I, koristićemo činjenicu da se x koordinata drugog tela može napisati kao zbir x koordinate prvog tela i dužine prvog tela. Diferenciranjem pomenutog izraza se dobija da je ubrzanje prvog tela jednako ubrzanju drugog tela.

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -g\sin\alpha + \mu_2 g\cos\alpha + \frac{g\cos\alpha(\mu_1-\mu_2)}{\cancel{m_2}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1\cancel{m_2}}\right)} =$$

$$= g\left[-(m_1+m_2)\sin\alpha + \underbrace{\mu_2\cos\alpha(m_1+m_2)}_{\cancel{\mu_2\cos\alpha m_1} + \mu_2\cos\alpha m_2} + \underbrace{\cos\alpha(\mu_1-\mu_2)m_1}_{\cos\alpha\mu_1 m_1 - \cancel{\cos\alpha\mu_2 m_1}}\right]\frac{1}{m_1+m_2} =$$

$$= \frac{g}{m_1+m_2}\left[-(m_1+m_2)\sin\alpha + \cos\alpha(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\right]$$

$\frac{d^2 x}{dt^2} \le 0$ – када се тело клиза (јер је систем окренут на горе, а не на доле)

$$\frac{g}{m_1+m_2}\left[-(m_1+m_2)\sin\alpha + \cos\alpha(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\right] \le 0$$

$$-(m_1+m_2)\sin\alpha \le -(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)\cos\alpha \quad /\cdot(-1)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha \ge \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1+m_2}$$

$$\boxed{\alpha \ge \mathrm{arc\,tg}\left(\frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1+m_2}\right)}$$

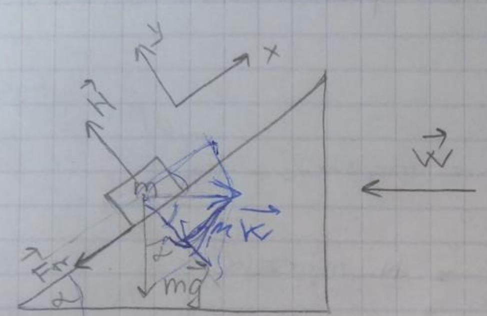
Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

2. **Prizma na kojoj se nalazi pločica mase m kreće se po horizontalnoj podlozi ubrzanjem w. Kolika je maksimalna vrednost w za koju će pločica ostati nepokretna u odnosu na prizmu ako se zna da je koeficijent trenja između njih μ<ctg α.**



$$m\overbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}^{0} = -mg\sin\alpha - \mu N + mw\cos\alpha$$

$$m\overbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}^{0} = -mg\cos\alpha + N - mw\sin\alpha$$

$$N = m(g\cos\alpha + w\sin\alpha)$$

$$F_{tr} \leq \mu N \qquad \Rightarrow F_{tr} = mw\cos\alpha - mg\sin\alpha =$$

$$F_{tr} \leq \underbrace{\mu m(g\cos\alpha + w\sin\alpha)}_{F_{tr}^{s(max)}} \qquad = m(w\cos\alpha - g\sin\alpha)$$

$$\Rightarrow \cancel{m}(w\cos\alpha - g\sin\alpha) \leq \mu\cancel{m}(g\cos\alpha + w\sin\alpha)$$

$$w\cos\alpha - g\sin\alpha \leq \mu g\cos\alpha + \mu w\sin\alpha$$

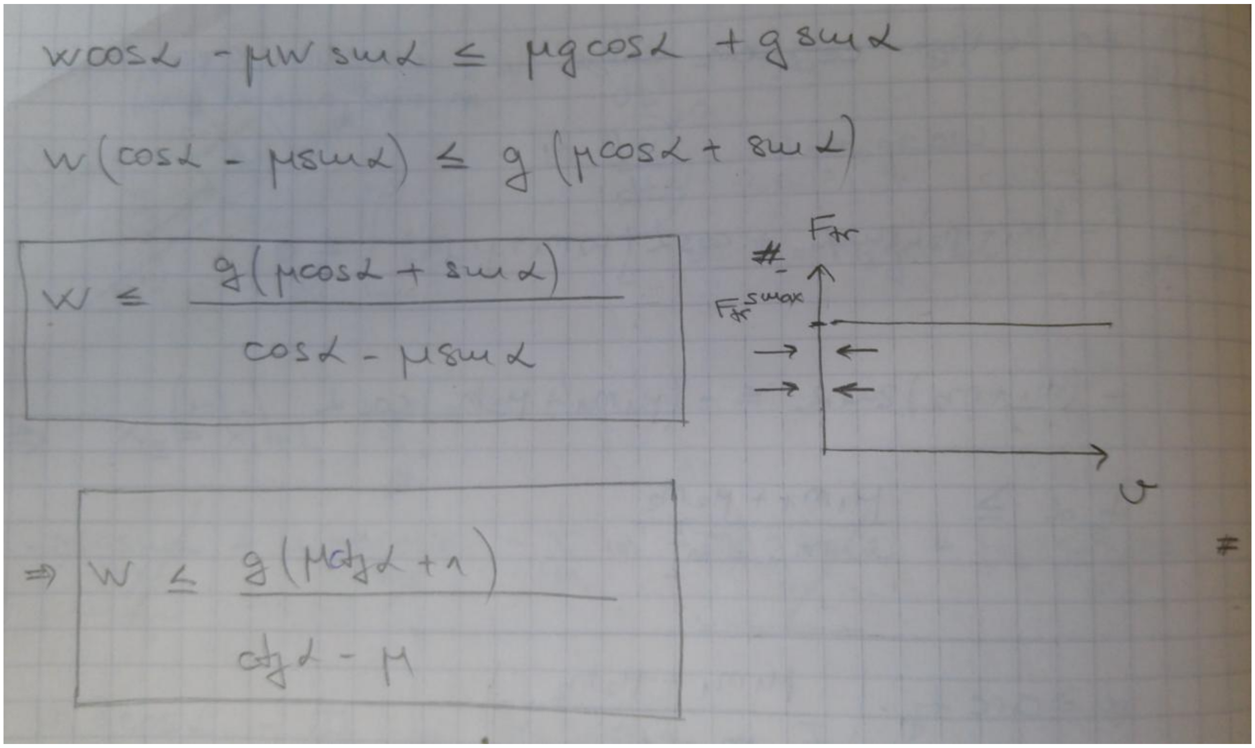
Projekcijom sila na x i y osu dolazimo do sile trenja koja je u ovom slučaju sila od interesa.

Zatim koristimo uslov zadatka da pločica treba da ostane nepokretna u odnosu na prizmu, ali uslov prilagođavamo orjentaciji Dekartovog koordinatnog sistema.

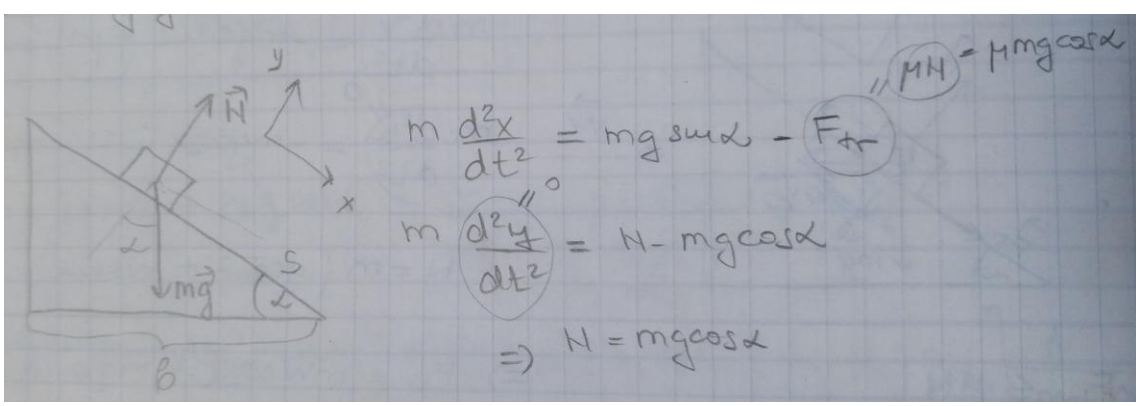
Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković



3. **Nekoliko strmih ravni imaju zajedničku osnovu.**
   a) **Koliki je nagib strme ravni prema horizontu ako je vreme spuštanja tela po toj strmoj ravni kraće nego po ostalim. (Razmotriti slučajeve kada je trenje zanemarljivo I kada je koeficijent trenja μ=0.25.**
   b) **Koliki je koeficijent trenja ako su vremena spuštanja pri nagibu strme ravni za $\alpha_1 = 60^\circ$ i $\alpha_2 = 45^\circ$ jednaka?**



Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$$

$$\frac{dx}{dt} = g\sin\alpha\, t - \mu g\cos\alpha\, t + \cancel{C_1}^{\,0}$$

$$x(t) = g\sin\alpha \frac{t^2}{2} - \mu g\cos\alpha \frac{t^2}{2} + \cancel{C_2}^{\,0} =$$

$$= g\frac{t^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\left.\begin{aligned} s(\tau) &= x(\tau) \\ s &= \frac{b}{\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{g\tau^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\boxed{\tau^2 = \frac{2b}{g\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

$$t^2 = \tau^2(\alpha)$$

$$\tau^2(\alpha_0) = \min \tau^2(\alpha_0) \Rightarrow \frac{d\tau^2(\alpha_0)}{d\alpha} = 0$$

$$\frac{d\tau^2}{d\alpha} = \frac{-2b\left[-\sin\alpha_0(\sin\alpha_0 - \mu\cos\alpha_0) + \cos\alpha_0(\cos\alpha_0 + \mu\sin\alpha_0)\right]g}{g^2\cos^2\alpha_0(\sin\alpha_0 - \mu\cos\alpha_0)^2} = 0$$

$$2bg\left[\sin^2\alpha_0 - \mu\sin\alpha_0\cos\alpha_0 - \cos^2\alpha_0 - \mu\cos\alpha_0\sin\alpha_0\right] = 0$$

$$\sin^2\alpha_0 - \cos^2\alpha_0 - 2\mu\sin\alpha_0\cos\alpha_0 = 0 \quad \Big/ \frac{1}{\cos^2\alpha_0}$$

$$tg^2\alpha_0 - 1 - 2\mu \underbrace{\frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0}}_{= tg\,\alpha_0} = 0$$

$$\#\ tg\,\alpha = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}\ \#$$

$$-2\mu\, tg\,\alpha_0 = 1 - tg^2\alpha_0$$

$$2\,tg\,\alpha_0 = \left(-\frac{1}{\mu}\right)(1 - tg^2\alpha_0)$$

$$\#\ tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha}\ \#$$

$$\frac{2\,tg\,\alpha_0}{(1 - tg^2\alpha_0)} = -\frac{1}{\mu}$$

Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$$\mathrm{tg}\,2\alpha_0 = -\frac{1}{\mu}$$

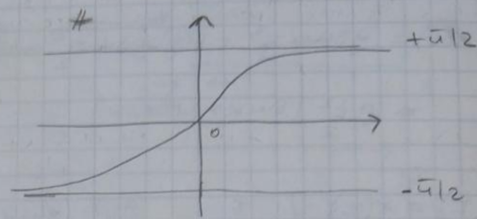
$$2\alpha_0 = \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\mu}\right)$$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\mu}\right)$$

$\alpha_0 = 45^\circ$ $\boxed{?}$

$\alpha_0 = 52^\circ$

#



#

б) $$\tau^2(\alpha_1) = \tau^2(\alpha_2)$$

$$\frac{2b}{g\cos\alpha_1(\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1)} = \frac{2b}{g\cos\alpha_2(\sin\alpha_2 - \mu\cos\alpha_2)}$$

$$\cos\alpha_1\sin\alpha_1 - \mu\cos\alpha_1^2 = \cos\alpha_2\sin\alpha_2 - \mu\cos\alpha_2^2$$

$$\mu(\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_1) = \cos\alpha_2\sin\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_1$$

$$\boxed{\mu = \frac{\cos\alpha_2\sin\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_1}{\cos^2\alpha_2 - \cos^2\alpha_1} = 0{,}267949}$$

$t = \mathrm{tg}\,\alpha_0$

$$t^2 - 2\mu t - 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 + 4}}{2} = \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 1}$$

1° $$\Rightarrow t_1 = \mu + \sqrt{\mu^2+1} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{17}{16}} = \frac{1+\sqrt{17}}{4} = 52^\circ$$

t_2 – није физички могуће решење јер се добија негативан угао α_0

2° $\mu = 0$

$$t = 0 + \sqrt{0+1} = 1$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha_0 = 1$$

$$\alpha_0 = \mathrm{arc\,tg}\,1 = \pi/4$$

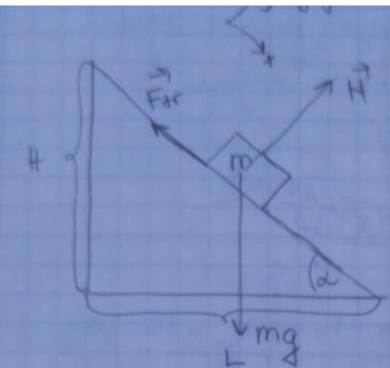
Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

4. **Nagib jednog dela puta iznosi 0.05. Spuštajući se po nagibu pri isključenom motoru automobil se kreće ravnomerno brzinom od 50 km/h. Koliko bi iznosila vučna sila motora ako bi se automobil kretao po istom takvom usponu jednakom brzinom? (Masa automobila je 1t)**



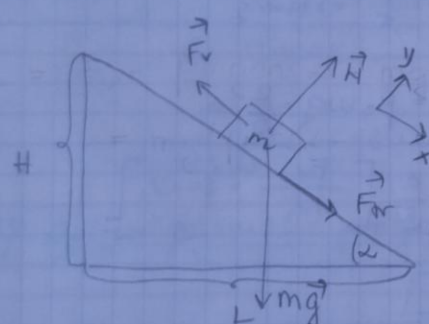
(1) $m\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{0} = -\mu N + mg\sin\alpha$

(2) $m\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{0} = N - mg\cos\alpha$

(2) $\Rightarrow$ $\boxed{N = mg\cos\alpha}$

(1) $\Rightarrow$ $\mu \cancel{mg}\cos\alpha = \cancel{mg}\sin\alpha$

$$\boxed{\mu = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha}$$



(1) $m\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{0} = +\mu N - F_v + mg\sin\alpha$

(2) $m\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{0} = N - mg\cos\alpha$

(2) $\Rightarrow$ $N = mg\cos\alpha$

(1) $\Rightarrow$ $\boxed{F_v} = \mu N + mg\sin\alpha =$

$= \mu mg\cos\alpha + mg\sin\alpha =$

$= mg(\mu\cos\alpha + \sin\alpha) =$

$= mg\left(\cancel{\mu}\frac{\sin\alpha}{\cancel{\mu}} + \sin\alpha\right) =$

$= \boxed{2\sin\alpha\, mg = \frac{2u}{\sqrt{1+u}}mg}$

$= \boxed{9{,}945\ N}$

$u = \frac{H}{L} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin\alpha = u\cos\alpha =$

$= u\sqrt{1-\sin^2\alpha} \quad /^2$

$\sin^2\alpha = u^2(1-\sin^2\alpha)$

$\sin^2\alpha + u^2\sin^2\alpha = u^2$

$\sin^2\alpha(1+u^2) = u^2$

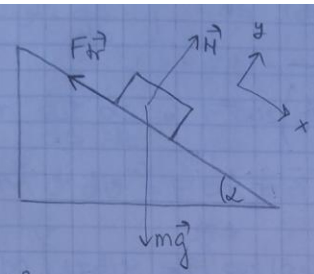
$\sin^2\alpha = \frac{u^2}{1+u^2}$

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

5. Malo telo kreće se niz strmu ravan nagibnog ugla α. Koeficijent trenja zavisi od pređenog puta x kao μ=a*x, gde je a konstanta. Naći put koji telo pređe do zaustavljanja i maksimalnu brzinu kretanja duž datog puta.



$\mu = ax$

$s = ?$

$v_{max} = ?$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha - \mu N$$

$$m\underbrace{\frac{d^2y}{dt^2}}_{=0} = N - mg\cos\alpha$$

$$N = mg\cos\alpha$$

$$\cancel{m}\underbrace{\frac{d^2x}{dt^2}}_{a_x} = \cancel{m}g\sin\alpha - \mu\cancel{m}g\cos\alpha$$

#

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}\\[2ex] \vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}\end{array}\right\} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v}$$

$$\frac{dv}{d\cancel{x}}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{=v} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$v\,dv = g(\sin\alpha - ax\cos\alpha)\,dx \quad /\int$$

$$\int_0^v v\,dv = g\int_0^x (\sin\alpha - ax\cos\alpha)\,dx$$

$$\frac{v^2}{2} = g\left(\sin\alpha\, x - \frac{ax^2}{2}\cos\alpha\right)$$

$$v = \sqrt{2g\left(\sin\alpha\, x - \frac{ax^2}{2}\cos\alpha\right)}$$

$*$ $v = 0$ – када се тело заустави:

$$\Rightarrow 2g\left(\sin\alpha\, x - \frac{ax^2}{2}\cos\alpha\right) = 0$$

$$x\left(2g\sin\alpha - \cancel{2}g\frac{ax}{\cancel{2}}\cos\alpha\right) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad 2g\sin\alpha = gax\cos\alpha$$

$$\boxed{x} = \frac{2\cancel{g}\sin\alpha}{\cancel{g}a\cos\alpha} = \boxed{\frac{2}{a}\,tg\,\alpha}$$ – пређени пут до заустављања

#

$$\frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{2g\left(\sin\alpha\, x - \frac{ax^2}{2}\cos\alpha\right)}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2g\left(\sin\alpha\, x - \frac{ax^2}{2}\cos\alpha\right)}}\cdot 2g(\sin\alpha - ax\cos\alpha) = 0$$

Obratite pažnju na bitan deo zadatka da se prvi izvod brzine po vremenu može napisati kao proizvod prvog izvoda brzine po koordinati x i prvog izvoda koordinate x po vremenu.

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$$g(\sin\alpha - a x \cos\alpha) = 0$$

$$\cancel{g}\sin\alpha = \cancel{g} a x \cos\alpha$$

$$x' = \frac{\sin\alpha}{a\cos\alpha} = \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

$$\boxed{v_{max}} = \sqrt{2g\left(\sin\alpha \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{a}{2}\frac{1}{a^2}\,\mathrm{tg}^2\alpha \cos\alpha\right)} =$$

$$= \sqrt{2g\left(\frac{1}{a}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \frac{1}{2a}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)} =$$

$$= \sqrt{\cancel{2}g\,\frac{1}{\cancel{2}a}\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{g}{a}\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}}$$

Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 3.4.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

6. **Za samostalan rad (Domaći zadatak):**
   Automobil se kreće uzbrdo, po strmoj ravni nagibnog ugla $\pi/3$, ravnomernom brzinom, pri čemu je vučna sila motora $F_v = 9kN$.
   a) **Izračunati vučnu silu motora automobila ako bi se on kretao po horizontalnom putu gde je koeficijent trenja 2.5 puta manji od koeficijenta trenja između automobila i strme ravni. Pretpostaviti da se automobil kreće ravnomerno.**
   b) **Naći put koji telo pređe u prvom slučaju smatrajući da se automobil kreće celom dužinom strme ravni.**

Masa automobile je 1t, a visina strme ravni 5m.

Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs