Fakultet za Fizičku Hemiju, Fizika 1, Računske vežbe          Petak, 10. april  2020.god.
Predmetni asistent: Violeta Stanković

## Zadaci:

1. Sa brda visokog h metara spuštaju se sanke i zaustavljaju se s metara daleko od projekcije vrha brda na horzontalnu ravan. Dokazati da je koeficijent trenja $\mu = h/s$.

2. Na slici u prilogu zadatka mase tela $m_0$, $m_1$, $m_2$ nisu jednake, mase kanapa i kotura su zanemarljive i ne postoji trenje u koturu. Naći ubrzanje kojim se telo mase $m_0$ kreće na dole, a zatim silu zatezanja kanapa koja drži tela mase $m_1$ i $m_2$ zajedno, ako je koeficijent trenja između ovih sila i podloge $\mu$.

3. Masa prizme na slici je M, a masa pločice m. Mase kotura i konca su zanemarljivo male kao i trenje prizme o horizontalnu podlogu. Koeficijent trenja između prizme i pločice je $\mu$. Odrediti ubrzanje pločice u odnosu na hoizontalnu podlogu.

4. Odrediti ubrzanje sa kojim se kreće teg mase $m_1$ na uređaju prikazanom na slici. Trenje, mase koturova i elastičnost kanapa su zanemarljivi. Ispitati sledeće slučajeve:
a) $m_1 = m_2$
b) $m_1 << m_2$
c) $2m_1 >> m_2$

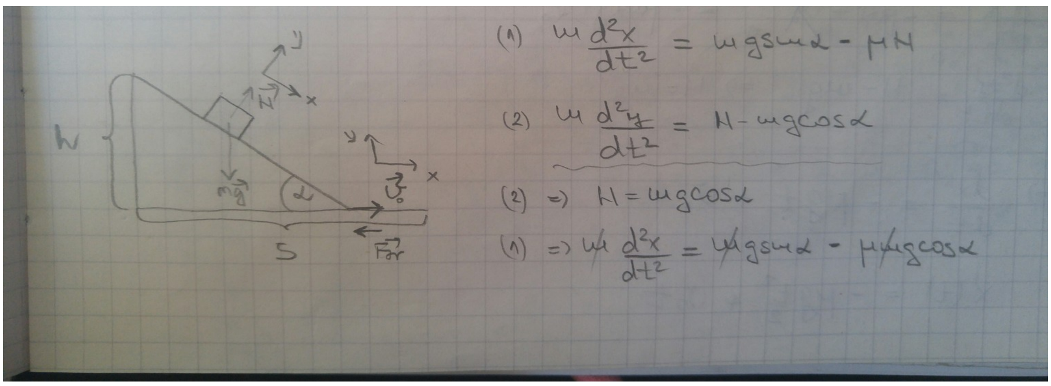
5. Poznati parametri sa slike su sledeći: ugao $\alpha$ koji strma ravan formira sa horizontalom i koeficijent trenja $\mu$ između tela mase $m_1$ i strme ravni. Mase kotura i konca kao i trenje u koturu su zanemarljivi. Ako su oba tela u početnom trenutku nepokretna, naći odnos masa $m_2/m_1$ kada se telo mase $m_2$:

a) kreće na dole
b) kreće na gore
c) ne kreće

6. Za domaći:

Za sistem prikazan na slici poznate su mase tela $m_1$, $m_2$, $m_3$, pri čemu su mase kotura i konca zanemarljive kao i trenje u koturu i nagibni ugao strme ravni $\alpha$. Odrediti odnos mase $m_3$ i zbira masa $m_1$ i $m_2$ za koji će se telo mase $m_3$ kretati na dole. Ispitati slučaj kada je $m_1 = 5m_2$.

**Rešenja:**
1.

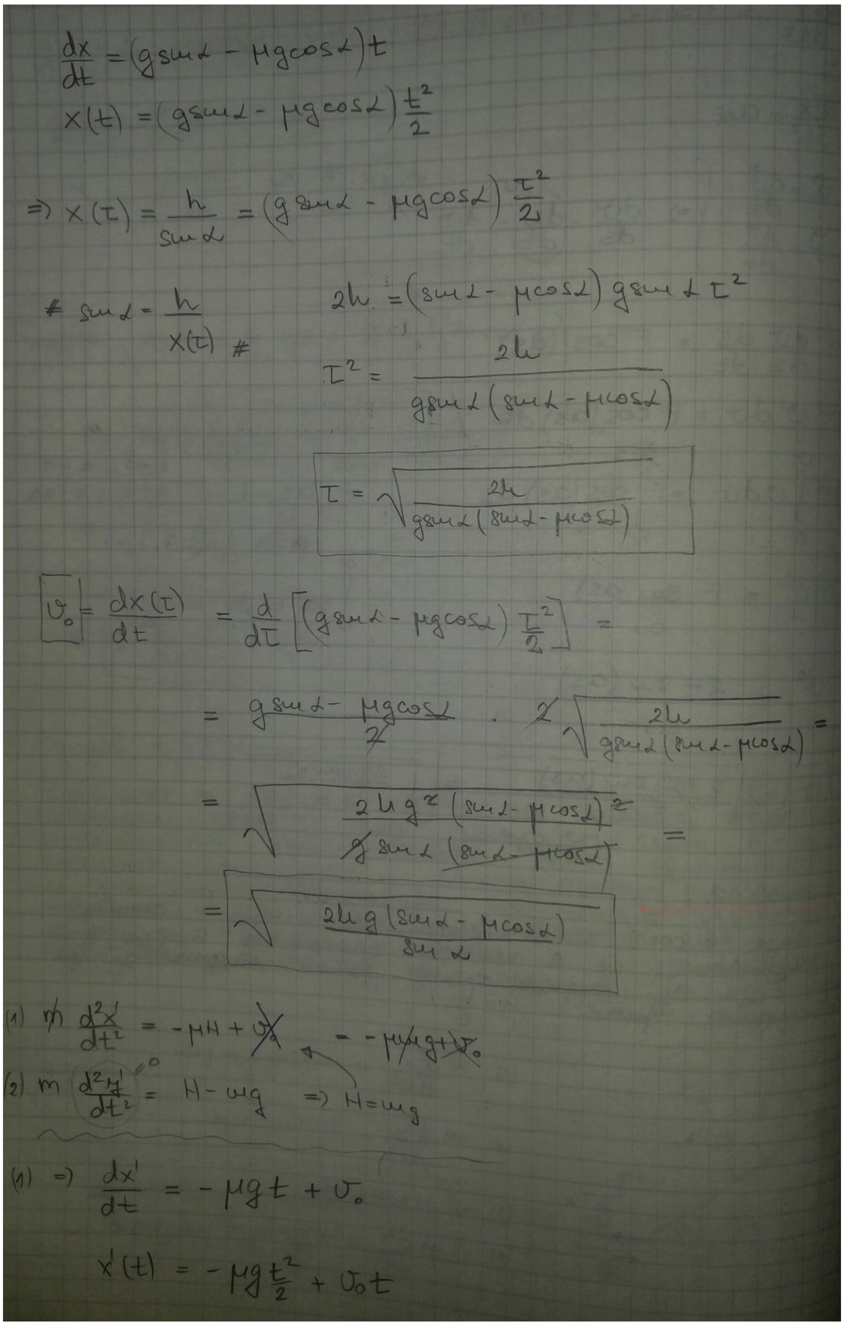


Konsultacije petkom u terminu od 12h do 14h na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs .

Fakultet za Fizičku Hemiju, Fizika 1, Računske vežbe Petak, 10. april 2020.god.
Predmetni asistent: Violeta Stanković

Potrebno je da nađete vreme koje je potrebno telu da sidje sa strme ravni, a zatim koristeći nađeni vremenski interval nalazi se krajnja brzina kojom se kreće telo na kraju strme ravni što je početna brzina tela na ravnoj površini.

Nakon toga, projektujete sve sile koje deluju na telo kada se kreće po ravnoj površini, nakon što siđe sa strme ravni.



$$\frac{dx}{dt} = (g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)t$$

$$x(t) = (g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow x(\tau) = \frac{h}{\sin\alpha} = (g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2}$$

$$\# \ \sin\alpha = \frac{h}{x(\tau)} \ \#$$

$$2h = (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\, g\sin\alpha\, \tau^2$$

$$\tau^2 = \frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

$$\boxed{\tau = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}}$$

$$\boxed{v_0} = \frac{dx(\tau)}{dt} = \frac{d}{d\tau}\left[(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)\frac{\tau^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2hg^2(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)^2}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}} =$$

$$= \boxed{\sqrt{\frac{2hg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}}}$$

$$(1)\ m\frac{d^2x'}{dt^2} = -\mu N + \cancel{v_0} = -\mu mg + \cancel{v_0}$$

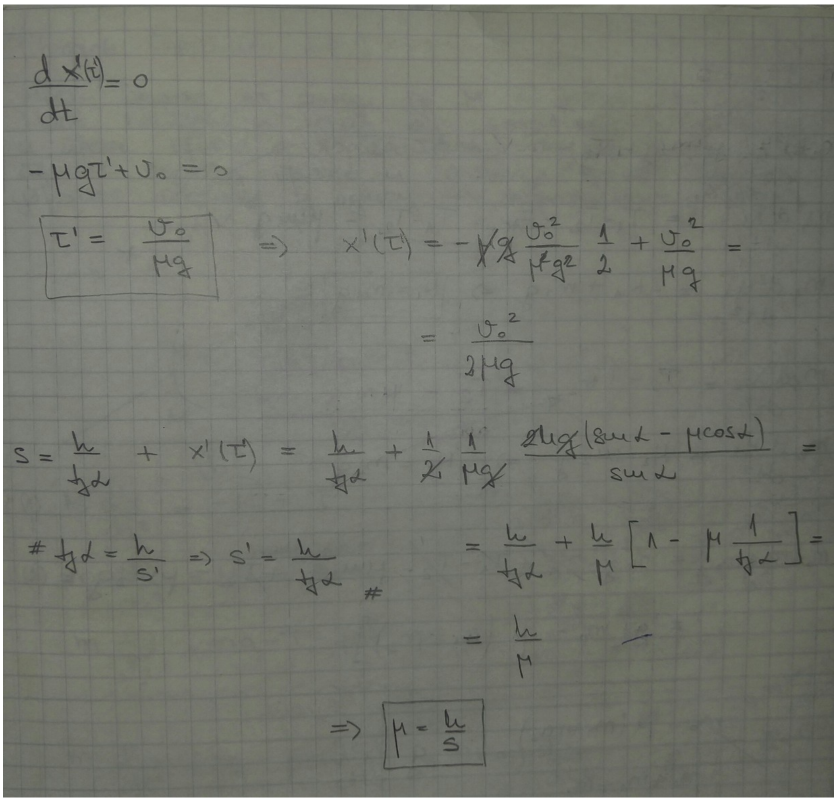
$$(2)\ m\frac{d^2y'}{dt^2} = N - mg \Rightarrow N = mg$$

$$(1) \Rightarrow \frac{dx'}{dt} = -\mu g t + v_0$$

$$x'(t) = -\mu g\frac{t^2}{2} + v_0 t$$

Obratite pažnju da početna brzina nije sila pa samim tim ne može ni da stoji u prvom redu gde su projektovane sile (što je inače najčešća greška).

Konsultacije petkom u terminu od 12h do 14h na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs .



$$\frac{d\,x'(\tau)}{dt} = 0$$

$$-\mu g \tau' + v_0 = 0$$

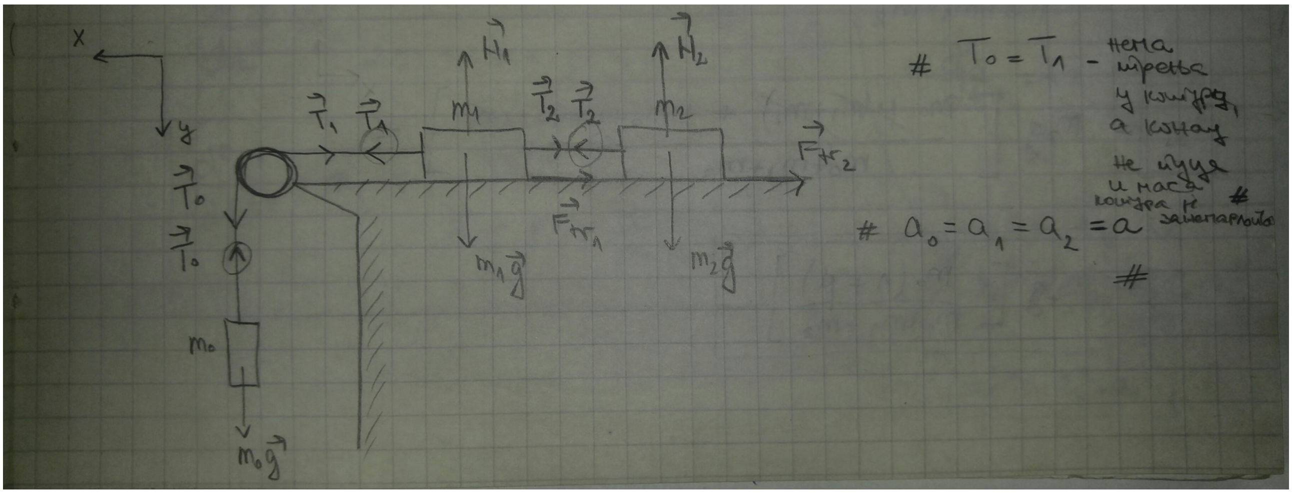
$$\boxed{\tau' = \frac{v_0}{\mu g}} \Rightarrow x'(\tau) = -\mu g \frac{v_0^2}{\mu^2 g^2}\frac{1}{2} + \frac{v_0^2}{\mu g} = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$

$$s = \frac{h}{tg\alpha} + x'(\tau') = \frac{h}{tg\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{\mu g}\frac{2hg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{h}{tg\alpha} + \frac{h}{\mu}\left[1 - \mu\frac{1}{tg\alpha}\right] = \frac{h}{\mu}$$

$$\# \; tg\alpha = \frac{h}{s'} \Rightarrow s' = \frac{h}{tg\alpha} \; \#$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu = \frac{h}{s}}$$

2.




Sile zatezanja konca (oko kotura) su jednake ukoliko se zanemaruje masa kotura i trenje, sto je slučaj u ovom zadatku.

Konsultacije petkom u terminu od 12h do 14h na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs .

(1) $m_0 \frac{d^2x_0}{dt^2} = 0$

$m_0 \frac{d^2y_0}{dt^2} = m_0 g - T_0$ ($\frac{d^2y_0}{dt^2} = a_0$, $T_0 = T_1$)

(2) $m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = T_1 - T_2 - F_{tr1} = T_1 - T_2 - \mu m_1 g$ ($\frac{d^2x_1}{dt^2} = a_1$)

$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = -N_1 + m_1 g \Rightarrow N_1 = m_1 g$

(3) $m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = T_2 - F_{tr2} = T_2 - \mu m_2 g$

$m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = N_2 - m_2 g \Rightarrow N_2 = m_2 g$

$$a[m_0 + m_1 + m_2] = m_0 g - T_1 + T_1 - T_2 - \mu m_1 g + T_2 - \mu m_2 g$$
$$= g[m_0 - \mu(m_1 + m_2)]$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_0 - \mu(m_1+m_2)}{m_0+m_1+m_2} g$$

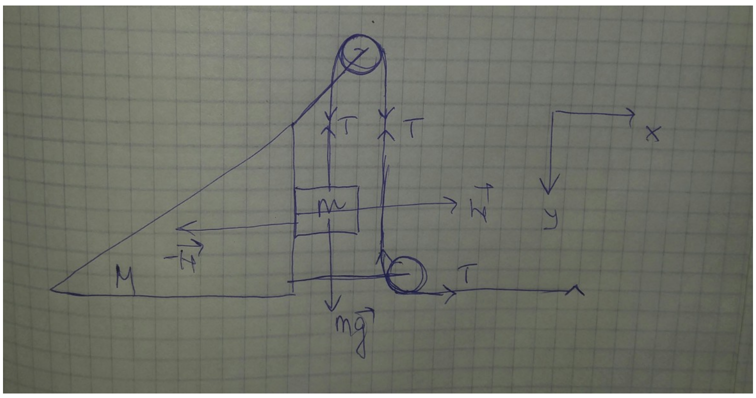
$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = T_2 - \mu m_2 g \quad (a_2 = a)$$

$$m_2 g \frac{m_0 - \mu(m_1+m_2)}{m_0+m_1+m_2} = T_2 - \mu m_2 g$$

$$T_2 = m_2 g \left[\frac{m_0 - \mu(m_1+m_2) + \mu m_0 + \mu m_1 + \mu m_2}{m_0+m_1+m_2}\right] =$$

$$= m_2 g \left[\frac{m_0(1+\mu)}{m_0+m_1+m_2}\right]$$

3.




Konsultacije petkom u terminu od 12h do 14h na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs .

Predmetni asistent: Violeta Stanković

$mg$

(1) $M \frac{d^2x}{dt^2} = -N + T$

(2) $m \frac{d^2x}{dt^2} = N$ — инерцијална сила

$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - T - \mu N$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$

$x' = x + L \quad / \frac{d^2}{dt^2}$

$\Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$

убрзање клина и убрзање призме

$m \frac{d^2y}{dt^2} = mg - \mu m \frac{d^2x'}{dt^2} - (M+m) \frac{d^2y}{dt^2}$, $\quad \frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$

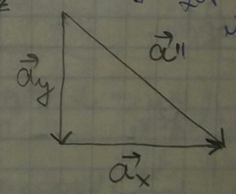
$(M+m) \frac{d^2y}{dt^2} = T$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}\left[m + \mu m + M + m\right] = mg$

$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{m}{2m + M + \mu m} g$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = a = \frac{\sqrt{2}\, g}{2 + \mu + \frac{M}{m}}$$

у односу на хоризонталну подлогу




$\vec{a}'' = \vec{a}_y + \vec{a}_x \quad /^2$

$a'' = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{2}\, a$

$\Rightarrow \frac{d^2x'}{dt^2} = \sqrt{2} \frac{d^2x}{dy^2}$

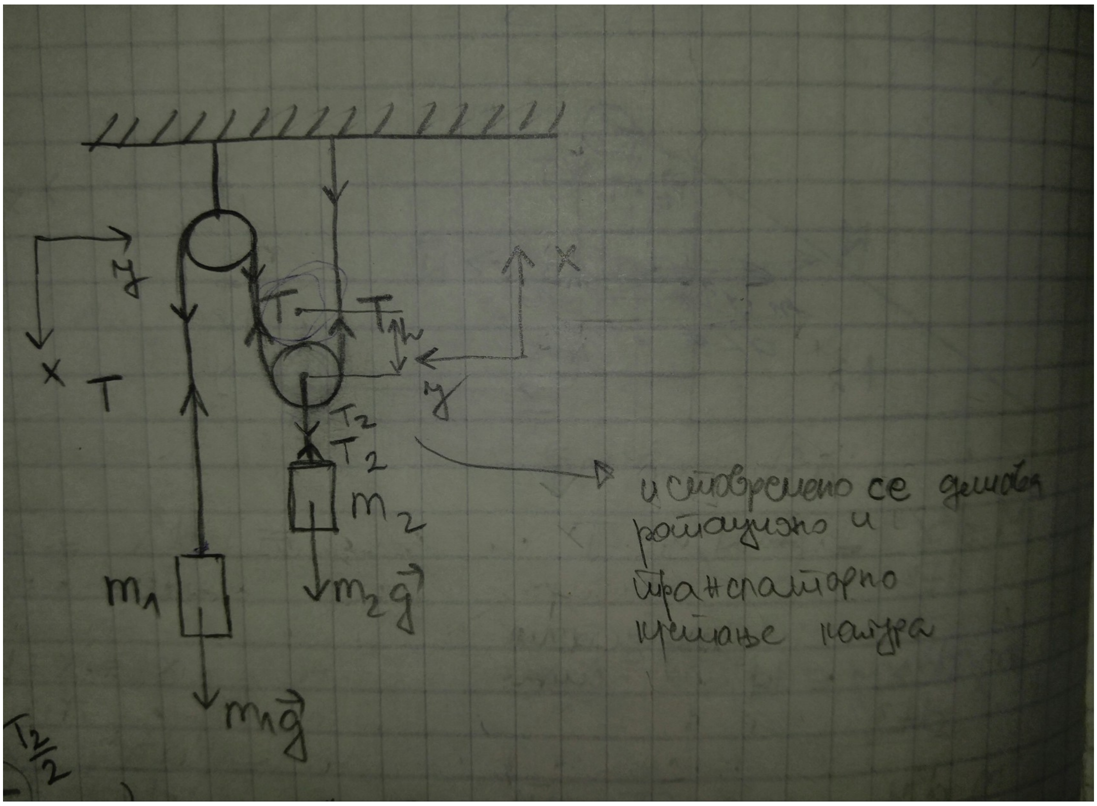
$\vec{a}'^2 = (\vec{a}_y + \vec{a}_x)^2$

$a'^2 = a_y^2 + 2\vec{a}_y\vec{a}_x + a_x^2$, $\quad 2\vec{a}_y\vec{a}_x = 0$

$$a'^2 = a_y^2 + a_x^2$$

Konsultacije petkom u terminu od 12h do 14h na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs .

4.




$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = m_1 g - T \quad \left(\frac{T_2}{2}\right)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -m_2 g + 2T \quad (T_2)$$

$$T_2 = 2T$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 2\frac{d^2x_2}{dt^2}$$

$$s_1 = 2h, \quad s_2 = h$$

$$\frac{s_1}{a_1} = \frac{s_2}{a_2}, \quad \frac{2h}{a_1} = \frac{h}{a_2}, \quad h a_1 = 2h a_2, \quad a_1 = 2a_2$$

$$m_2 \underbrace{\frac{d^2x_2}{dt^2}}_{\frac{1}{2}\frac{d^2x_1}{dt^2}} = -m_2 g + 2\left[m_1 g - m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}\right]$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2}\left[\frac{m_2}{2} + 2m_1\right] = \left[2m_1 - m_2\right] g$$

$$2\frac{d^2x_1}{dt^2}\left[m_1 + \frac{m_2}{4}\right] = 2\left[m_1 - \frac{m_2}{2}\right] g$$

$$\boxed{\frac{d^2x_1}{dt^2}} = \frac{m_1 - \frac{m_2}{2}}{m_1 + \frac{m_2}{4}}\, g = \frac{\frac{1}{2}[2m_1 - m_2]}{\frac{1}{4}[4m_1 + m_2]}\, g = \boxed{\frac{2(2m_1 - m_2)}{4m_1 + m_2}}$$

a) $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{2(2m_1-m_2)}{4m_1+m_2}g = \frac{2(m_1)}{5m_1}g$$

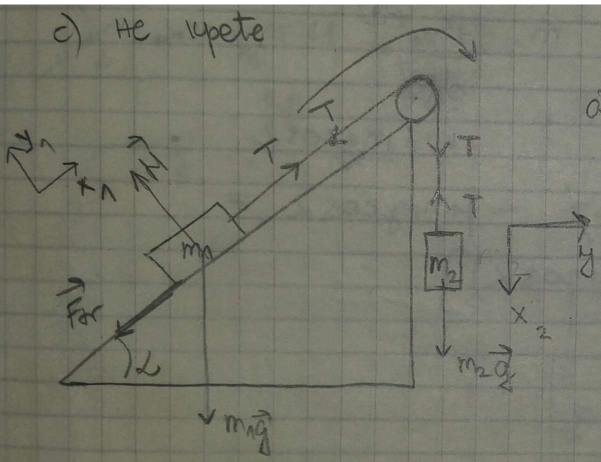
б) $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{2(2m_1-m_2)}{4m_1+m_2}g \approx -\frac{2m_2}{m_2}g$$

в) $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{2(2m_1-m_2)}{4m_1+m_2}g = 0$$

г) $$\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{2(2m_1-m_2)}{4m_1+m_2}g \approx \frac{4m_1}{4m_1}g = g$$

5.

c) не упете




$\mu m_1 g\cos\alpha$

a) $$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = T - m_1 g\sin\alpha - \mu N \qquad \left(\frac{d^2x_1}{dt^2} = a\right)$$

$$m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} = N - mg\cos\alpha \qquad \left(\frac{d^2y_1}{dt^2} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{N = mg\cos\alpha}$$

$$m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = m_2 g - T \qquad \left(\frac{d^2x_2}{dt^2} = a\right)$$

$$a(m_1+m_2) = T - m_1 g\sin\alpha - \mu m_1 g\cos\alpha + m_2 g - T =$$
$$= g[m_2 - m_1[\sin\alpha + \mu\cos\alpha]]$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{m_1+m_2}g}$$

Konsultacije petkom u terminu od 12h do 14h na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs .

$$a \geq 0$$

$$m_2 - m_1(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \geq 0$$

$$1 - \frac{m_1}{m_2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \geq 0$$

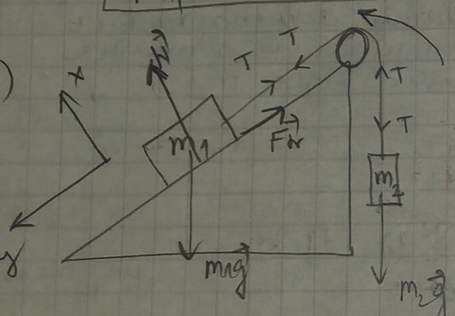
$$-\frac{m_1}{m_2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \geq -1 \quad / (-1)$$

$$\frac{m_1}{m_2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) \leq 1$$

$$\frac{m_1}{m_2} \leq \frac{1}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}$$

$$\boxed{\frac{m_2}{m_1} \geq \sin\alpha + \mu\cos\alpha}$$

б)




$$m_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -m_2 g + T$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} = m_1 g \sin\alpha - T - \mu N \qquad (\mu m_1 g \cos\alpha)$$

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = 0 = N - m_1 g \cos\alpha$$

$$N = m_1 g \cos\alpha$$

$$a[m_1 + m_2] = -m_2 g + T + m_1 g \sin\alpha - T - \mu m_1 g \cos\alpha =$$
$$= g[-m_2 + m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)]$$

$$\boxed{a = \frac{-m_2 + m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m_1 + m_2}\, g}$$

$$a \geq 0$$

$$-m_2 + m_1(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \geq 0$$

$$-\frac{m_2}{m_1} + (\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \geq 0$$

Fakultet za Fizičku Hemiju, Fizika 1, Računske vežbe Petak, 10. april 2020.god.
Predmetni asistent: Violeta Stanković

$$\frac{m_2}{m_1} \geq -(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$$\boxed{\frac{m_2}{m_1} \leq \sin\alpha - \mu\cos\alpha}$$

ц) $$\boxed{\sin\alpha - \mu\cos\alpha < \frac{m_2}{m_1} < \sin\alpha + \mu\cos\alpha}$$

систем се не креће

Konsultacije petkom u terminu od 12h do 14h na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs .