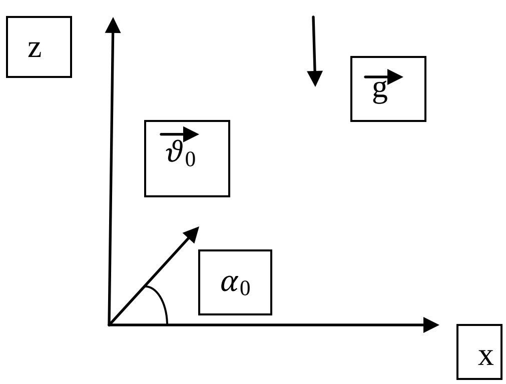
Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

1. **Telo je bačeno pod uglom od 60 ° prema horizontu, brzinom ϑ_0=20 m/s.**
   a) **Pod kojim će se uglom, prema horizontu, kretati telo posle 1.5s i posle 2.5 s od početka kretanja?**
   b) **Posle koliko vremena i na kojoj visini će se telo kretati pod uglom od 45 ° u odnosu na horizont?**

Rešenje:



t_1=1.5 s

t_2=2.5s

α=?

h=?

$m*\frac{d^2}{dt}\vec{r}=m*\vec{g}$ (polazimo od Drugog Njutnovog zakona kako bismo izveli formule za trajektoriju odnosno položaj tela, u svakom vremenskom trenutku)

$\frac{d^2}{dt^2}z=-g$ (integracijom ovog izraza dobija se izraz za z komponentu brzine tela

$\frac{d}{dt}(z)=-gt+C_1$ (integraciona konstanta se određuje iz početnih uslova zadatka, u ovom slučaju u početnom trenutku telo je imalo početnu brzinu ,
pa će integraciona konstanta C_1 biti jednaka z komponenti početne brzine
(projekcija početne brzine na z osu je $\vartheta_0*\sin\alpha$) odnosno $C_1=\vartheta_0*\sin\alpha$)

z=-gt^2/2 + ϑ_0 *sin* α_0**t+*C_2 (*integraciona konstanta* C_2 *je jednaka nuli budući da se telo u početnom trenutku nalazilo na Zemlji*)

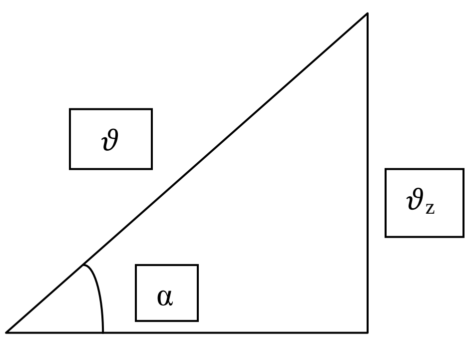
z=-gt^2/2 + ϑ_0 *sin* α_0**t* (*z komponenta radijus vektora bačenog tela)*

Analogno nalaženju z komponente, nalazimo x kompnentu radijus vektora bačenog tela:

$\frac{d^2}{dt}(x)= 0$ (projekcija jedine sile koja deluje na telo, gravitaciona sila, jednaka je nuli)

$\frac{d}{dt}(x) = C_2$ (u početnom trenutku x komponenta brzine jednaka je x komponenti početne brzine tj $C_2=\vartheta_0 * \cos\alpha_0$)

$x(t) = \vartheta_0 * \cos\alpha_0 * t$ (integraciona konstanta C_3 jednaka je nuli jer se telo u početnom trenutku nalazilo na nivou zemlje)



$\mathrm{tg}\ \alpha = \vartheta_z / \vartheta_x$

$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-gt + \vartheta 0\ sin\alpha\ 0}{\vartheta 0 \cos\ \alpha 0}$

$\alpha = \mathrm{arc\ tg}\ (\frac{-gt + \vartheta 0\ sin\alpha\ 0}{\vartheta 0 \cos\ \alpha 0})$

$\alpha_1(t_1)=14.68\ ^\circ$

$\alpha_1(t_1)=-35.67\ ^\circ$

$\alpha= 45\ ^\circ$ (iz sledeće jednačine nalazimo vreme koje je potrebno telu da se kreće pod uglom od $45\ ^\circ$)

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

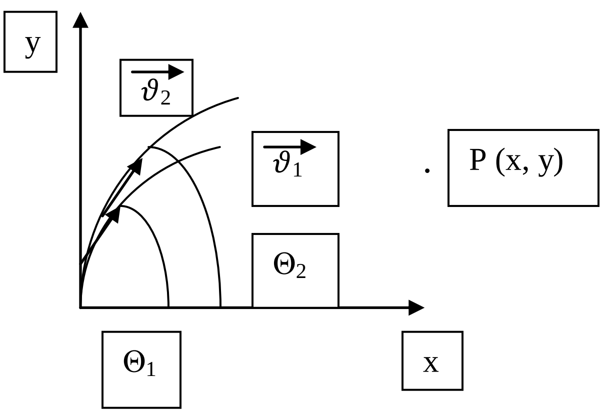
tg α = $\frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-gt + \vartheta 0\ sin\alpha\ 0}{\vartheta 0 \cos\ \alpha 0}$ =-gt/$\vartheta_0$cos α_0 +tg α_0

t = ($\vartheta_0$cos α_0/g)*(tg α_0 – tg α) = 0.746 °

h =z (t) = 10.2 m

2. Top ispaljuje dve granate brzinom ϑ_0=250 m/s. Prvu pod uglom θ_1=60 ° a drugu pod uglom od θ_2=45 °, u odnosu na horizont. Zanemarujući otpor vazduha, naći vremenski interval između ispaljivanja u odnosu na sudar granata.

Rešenje:

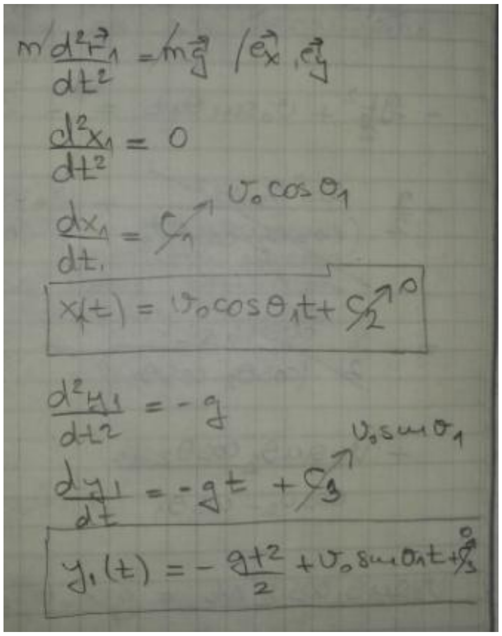


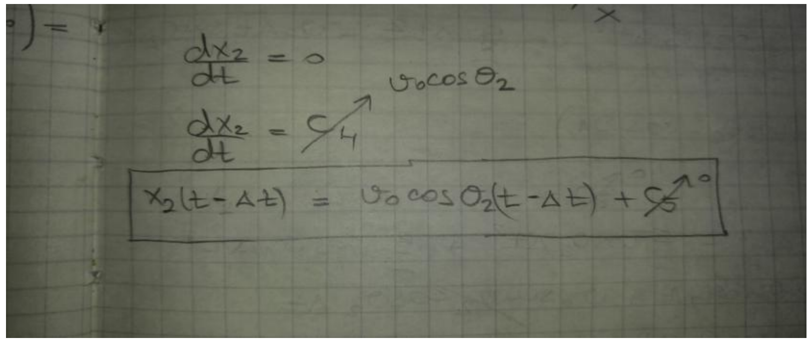
Dve granate su ispaljene pod uglovima od 60˚ i 45˚, jednakom početnom brzinom. Nakon nekog vremena dve granate će se sudariti u tački P čije su koordinate date kao (x, y).

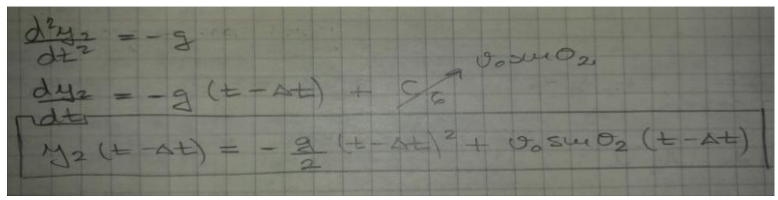
Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković







Na slici levo možete videti način izvođenja x i y komponente radijus vektora prve granate. Dok na slici desno takođe mo-ete videti način izvođenja x i y komponente radijus vektora druge granate. Obratite pažnju da x i y komponenta druge granate zavise od vremenskog trenutka predstavljenog kao t-Δt buduci da je druga granata ispaljena nakon vremena Δt u odnosu na prvo tela .

U trenutku sudara prva i druga granata imaju jednake koordinate tj $x_1=x_2$ i $y_1 = y_2$. Iz jednakosti $x_1=x_2$ dobija se vreme t koje je potrebno prvoj granati da stigne u tačku P i sudari se sa drugom granatom, u odnosu na početni trenutak. Iz druge jednakosti dobija se interval između ispaljivanja a u odnosu na trenutak sudara, Δt.

Na slici ispod možete videti način dobijanja vremena t.

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$$x_1(t) = x_2(t-\Delta t) \quad \text{- у тренутку судара}$$

$$\cancel{v_0}\cos\theta_1 t = \cancel{v_0}\cos\theta_2 (t-\Delta t)$$

$$\cos\theta_1 t - \cos\theta_2 t = -\cos\theta_2 \Delta t$$

$$t(\cos\theta_2 - \cos\theta_1) = \cos\theta_2 \Delta t$$

$$\boxed{t = \frac{\cos\theta_2 \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}}$$

Zatim na sledećim slikama možete videti način dobijanja vremenskog intervala Δ*t*.

$$y_1(t) = y_2(t-\Delta t) \quad \text{- у тренутку судара}$$

$$-\frac{gt^2}{2} + v_0 \sin\theta_1 t = -\frac{g\overbrace{(t-\Delta t)^2}^{t^2-2t\Delta t+\Delta t^2}}{2} + v_0 \sin\theta_2 (t-\Delta t)$$

$$-\frac{g}{2}\frac{\cos^2\theta_2 \Delta t^2}{\cancel{(\cos\theta_2-\cos\theta_1)^2}} + \frac{v_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} =$$

$$= -\frac{g}{\cancel{2}}\frac{\cancel{\cos^2\theta_2 \Delta t^2}}{(\cos\theta_2-\cos\theta_1)^2} + \frac{g\cos\theta_2 \Delta t^2}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} - \frac{g}{2}\Delta t^2 - v_0 \Delta t \sin\theta_2$$

$$+ \frac{v_0 \sin\theta_2 \cos\theta_2 \Delta t}{\cos\theta_2 - \cos\theta_1} \quad \Big/ \; (\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$

$$v_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \Delta t = g\cos\theta_2 \Delta t^2 - \frac{g}{2}\cos\theta_2 \Delta t^2 + \frac{g}{2}\cos\theta_1 \Delta t^2$$

$$- v_0 \sin\cancel{\theta_2} \cos\theta_2 \Delta t + v_0 \sin\cancel{\theta_2} \cos\theta_2 \Delta t$$

$$+ v_0 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \Delta t$$

Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$$\vartheta_0 \sin\theta_1 \cos\theta_2 \Delta t - \vartheta_0 \sin\theta_2 \cos\theta_1 \Delta t = \frac{g}{2}\cos\theta_2 \Delta t^2 + \frac{g}{2}\cos\theta_1 \Delta t^2$$

$$\vartheta_0 \Delta t \left(\sin(\theta_1-\theta_2)\right) = \frac{g}{2}\Delta t^2 (\cos\theta_2 + \cos\theta_1)$$

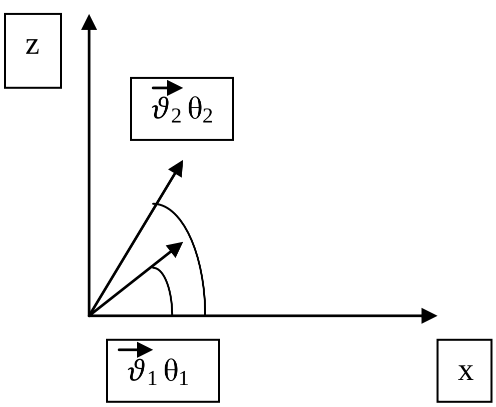
$$2\vartheta_0 \Delta t \sin(\theta_1-\theta_2) = g\Delta t^2 (\cos\theta_2 + \cos\theta_1)$$

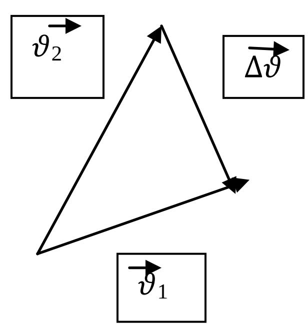
$$\Delta t\left[g\Delta t(\cos\theta_2+\cos\theta_1) - 2\vartheta_0\sin(\theta_1-\theta_2)\right] = 0$$

$$\boxed{\Delta t = \frac{2\vartheta_0 \sin(\theta_1-\theta_2)}{g(\cos\theta_2+\cos\theta_1)}}$$

3. **Dva tela su istovremeno bačena različitim brzinama i pod različitim uglovima prema horizontu. Pokazati da je za vreme kretanja njihova relativna brzina konstantna po pravcu i intenzitetu.**

Rešenje:





Na slici sa desne strane možemo da primetimo da je vektor relativne brzine $\overrightarrow{\Delta\vartheta}$, a vektor relativne brzine jeste razlika $\vec{\vartheta}_1$-$\vec{\vartheta}_2$. Na način objašnjen u prethodnim zadacima dolazi se do x i z komponentiradijus vektora prvog i drugog tela. Budući da je ovde bitan vektor brzine, potrebno je naći x i z komponente brzine kretanja prvog i drugog tela.

Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$x_1(t_1) = \vartheta_{01}\cos\alpha_1 * t$

$z_1(t_1) = -gt\text{^}2/2 + \vartheta_{01}\sin\alpha_1 * t$

$x_2(t_2) = \vartheta_{02}\cos\alpha_2 * t$

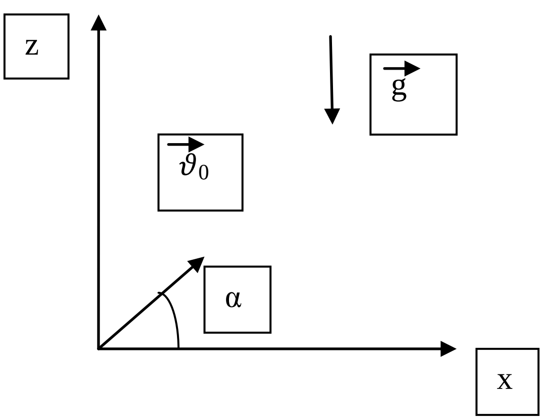
$z_2(t_2) = -gt_2\text{^}2/2 + \vartheta_{02}\cos\alpha_2 * t$

$|\Delta\vartheta| = |\vartheta_1 - \vartheta_2| = ((\frac{dx_1}{dt} - \frac{dx_2}{dt})\text{^}2 + (\frac{dz_1}{dt} - \frac{dz_2}{dt})\text{^}2)\text{^}1/2 =$

$= ((\vartheta_{01}\cos\alpha_1 - \vartheta_{02}\cos\alpha_2)\text{^}2 + (\vartheta_0 \sin\alpha_1 - \vartheta_{02}\sin\alpha_2))\text{^}1/2$

4. **Telo je bačeno sa Zemlje pod uglom α prema horizontu početnom brzinom $\boldsymbol{\vartheta_0}$. Zanemarujući otpor vazduha odrediti:**

   a) **vreme kretanja**
   b) **maksimalnu visinu do koje se telo popne, domet tela kao i ugao za koji su te dve veličine jednake**
   c) **jednačinu trajektorije z (x)**



Na način prikazan u prethodnim zadacima dolazi se do x i z komponente radijus vektora.

$x(t) = \vartheta_0 \cos\alpha * t$

$z(t) = -gt\text{^}2/2 + \vartheta_0 \sin\alpha * t$

Prvo je potrebno odrediti ukupno vreme kretanja tela. Dobija se kada se z komponenta radijus vektora izjednači sa nulom $(z(t=\tau)=0)$ iz čega sledi da je $\tau=2\vartheta_0 \sin\alpha/g$.

Domet tela dobija se kada se u izrazu za x komponentu umesto vremena t zameni ukupno vreme kretanja tela $\tau=2\vartheta_0 \sin\alpha/g$, pa sledi da je $D = x(\tau)=\vartheta_0 \sin 2\alpha/g$.

Maksimalna visina do koje se telo popne dobija se kada se u izraz za z komponentu radijus vektora tela umesto vremena t zameni vreme koje je potrebno telu da dostigne maksimalnu visinu. Vreme koje je potrebno telu da dostigne maksimalnu visinu dobija se iz prvog izvoda, z komponente radijus vektora tela, po vremenu.

$dz(t_1)/dt=0$

$t_1=\vartheta_0 \sin\alpha/g$

$z_{max}(t_1) = \vartheta_0 \sin^2\alpha/2g$

Ugao za koji su domet tela i maksimalna jednake dobija se izjednačavanjem pomenutih veličina.

$z_{max}(t_1) = D = x(\tau)$

$\vartheta_0 \sin^2\alpha/2g = \vartheta_0 \sin 2\alpha/g$ iz čega sledi da je $\alpha = arc\ tg\ (4) =75.963\ ^\circ$

Jednačina trajektorije tela z(x) dobija se kada se vreme t u izrazu za z komponetnu radijus vektora tela zameni komponentom x koja zavisi od vremena.

$x(t) = \vartheta_0 \cos\alpha * t$ odakle sledi da je $t = x / \vartheta_0 \cos\alpha$

$z(x) = -g/2 * (x^2/ \vartheta_0{}^2 \cos^2\alpha) + tg\,\alpha * x$

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

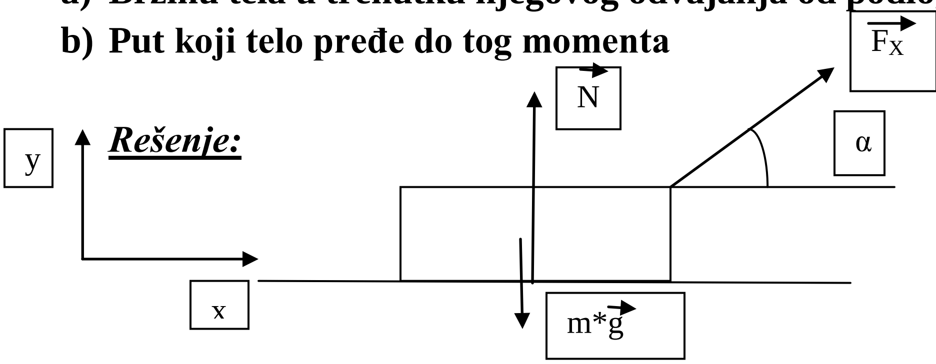
Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

5. Od početnog trenutka t=0 sila F=at deluje na malo telo mase m koja se nalazi na glatkoj horizontalnoj površini (a je konstanta). Stalan smer sile zaklapa ugao α sa horizontalom. Naći:

a) Brzinu tela u trenutku njegovog odvajanja od podloge

b) Put koji telo pređe do tog momenta

Rešenje:



$m*a_y= N\text{-}mg+F*\sin\alpha$ (Krenuvši od drugog Njutnovog zakona, primenjenog na sistem sa slike, dolazimo do jednačine u kojoj figuriše y komponenta ubrzanja kao i y projekcija svih sila koje deluju na telo.)

U datoj jednačini figuriše normalna sila koja je jednaka nuli u trenutku odvajanja tela od podloge, a y komponenta ubrzanja je takodje jednaka nuli jer nema kretanja po y osi. S tim u vezi, dobijamo da je $-m*g=-a*t*\sin\alpha$ iz čega sledi da je $t=m*g/a*\sin\alpha$.

$F_x=m*\frac{d\vartheta_x}{dt}=a*t*\cos\alpha$ - x komponenta sile

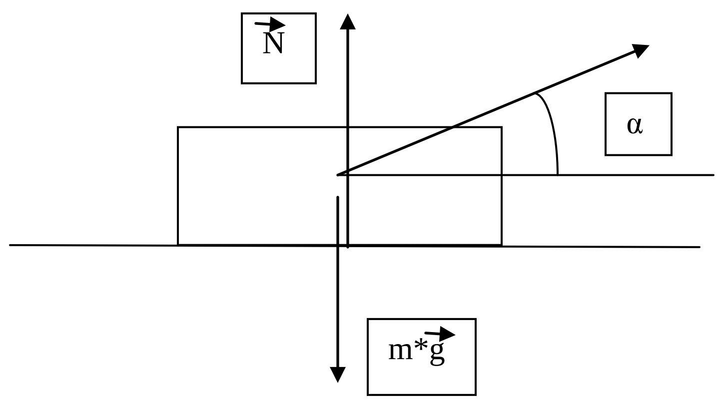
$m*d\vartheta_x=a*t*\cos\alpha*dt$ - zatim ovu jednakost integralimo, levu stranu jednakosti u granicama od 0 do ϑ, a desnu stranu jednakosti u granicama od 0 do t

$m*\vartheta=(a*t^2/2)*\cos\alpha$ –izraz dobijen nakon integracije (umesto t zamenjujemo vreme odvajanja od podloge) iz koga sledi da je brzina $\vartheta=(m*g^2*\cos\alpha)/(2*a*\sin^2\alpha)$.

$ds=\vartheta*dt$

$s=\int_0^t \vartheta dt=\int_0^t ((a * \cos\alpha * t^2)/2m)dt=(m^2*g^3\cos\alpha)/(6*a^2*\sin^3\alpha)$-put koji pređe telo do zaustavljanja

6. **Telo mase m, koje se nalazi na glatkoj horizontalnoj površini, kreće se pod uticajem sile F=mg/3 konstantnog intenziteta. Tokom pravolinijskog kretanja tela, ugao α, između pravca delovanja sile i horizontale , varira kao α=a*s, gde je a konstanta, a s pređeni put datog tela u odnosu na početni trenutak. Naći brzinu tela u funkciji ugla α.**



Na slici ispod vidi se tok rešavanja zadatka. Dakle, na prvom mestu projektovati sve sile na x osu, zatim iskoristiti jedno “malo” proširenje izvoda, a zatim izvršiti integraciju u granicama od 0 do ϑ i od 0 do s, analogno prethodnom zadatku.

Predmet: Fizika 1

Računske vežbe (Termin: 27.3.2020)

Predmetni asistent na računskim vežbama: Violeta Stanković

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F\cos\alpha = F\cos(as)$$

$\frac{d^2x}{dt^2} = a_x$

$$\left.\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt}\\ \vec{v} &= \frac{d\vec{s}}{dt}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dv}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=v} = \frac{dv}{dt}$$

#

$$m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = F\cos(as)$$

$$m v\, dv = F\cos(as)\, ds \quad / \int$$

$$m\int_0^{v} v\, dv = F\int_0^{\cancel{\infty} s} \cos(as)\, ds$$

$as = t$ / $s = 0$; $t = 0$; $s = s$; $t = as$

$$ds = \frac{1}{a}dt$$

$$\int_0^{\infty} \cos t \,\frac{dt}{a} = \frac{\sin t}{a}$$

#

$$m\frac{v^2}{2} = \frac{F\sin(as)}{a}$$

$$v^2 = \frac{2F\sin(as)}{am}$$

$$\boxed{v} = \sqrt{\frac{2\cancel{m}g\sin(as)}{3a\cancel{m}}} = \boxed{\sqrt{\frac{2g\sin\alpha}{3a}}}$$

Konsultacije petkom od 12 do 14 časova na e-mail violeta.stankovic@ff.bg.ac.rs