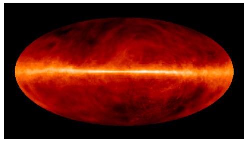
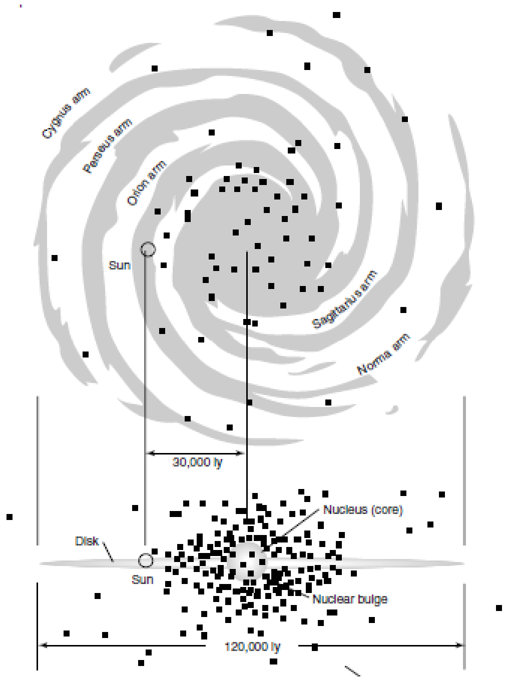
Атом – спински и орбитни магнетизам

- Штерн-Герлахов оглед
- Ајнштајн-де Хасов експеримент
- Објаснити фину структуру оптичких спектара атома
- Земанов ефекат - зашто се спектралне линије цепају у магнетном пољу?

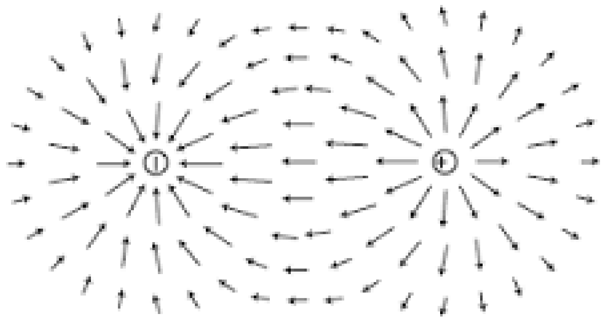
NMR, MRI

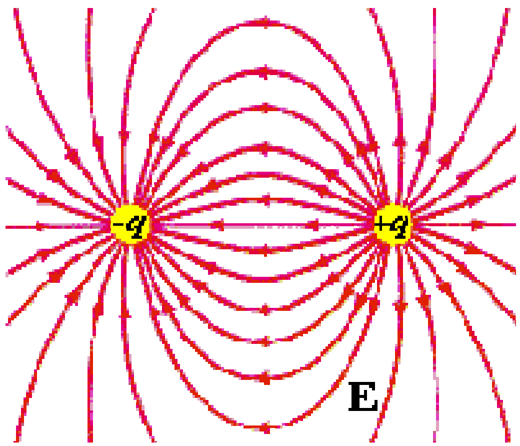


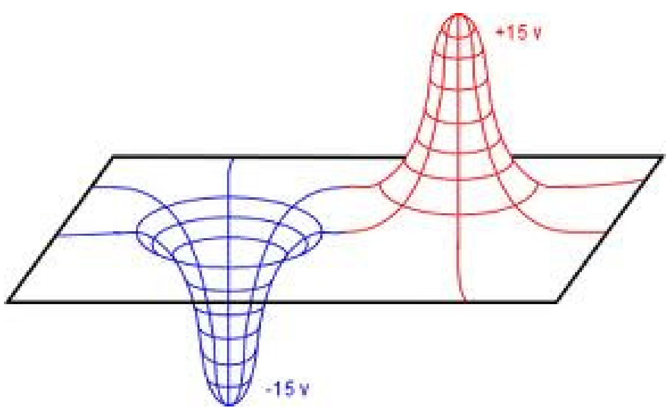


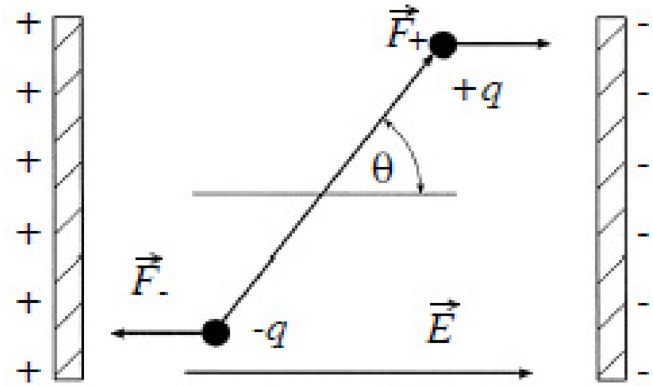
21 cm

Електрични дипол - подсећање





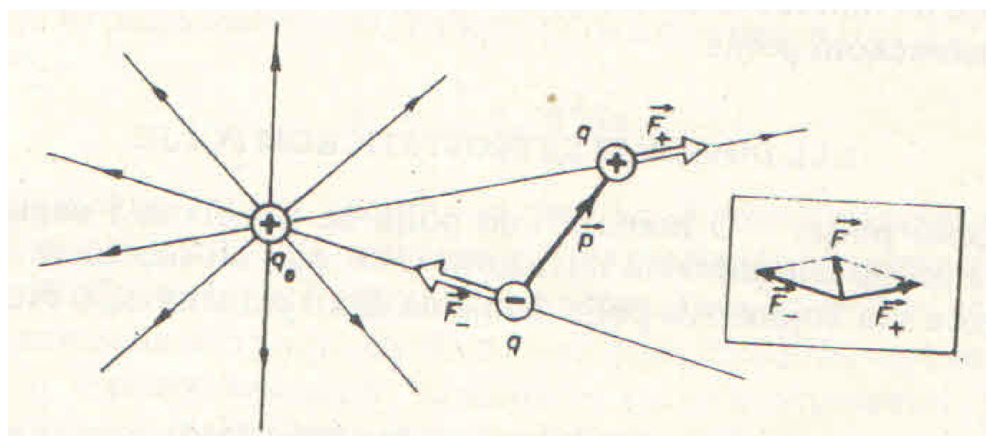




$$\vec{M} = \vec{\mu}_{\mathrm{el}} \times \vec{E}$$

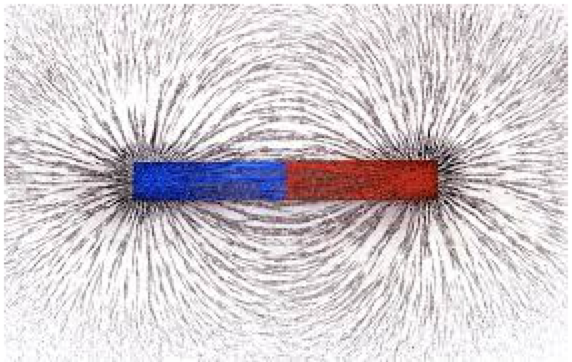
$$U = -\vec{\mu}_{\mathrm{el}} \cdot \vec{E}$$

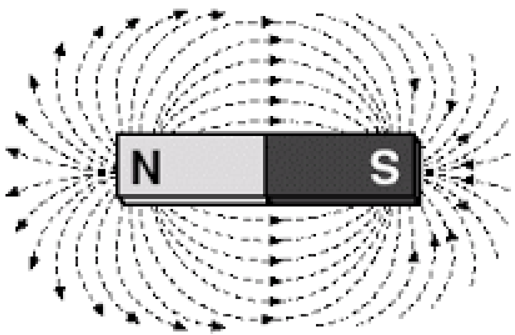
Хомогено електрично поље може изазвати ротационо, али не и транслаторно кретање електричног дипола.

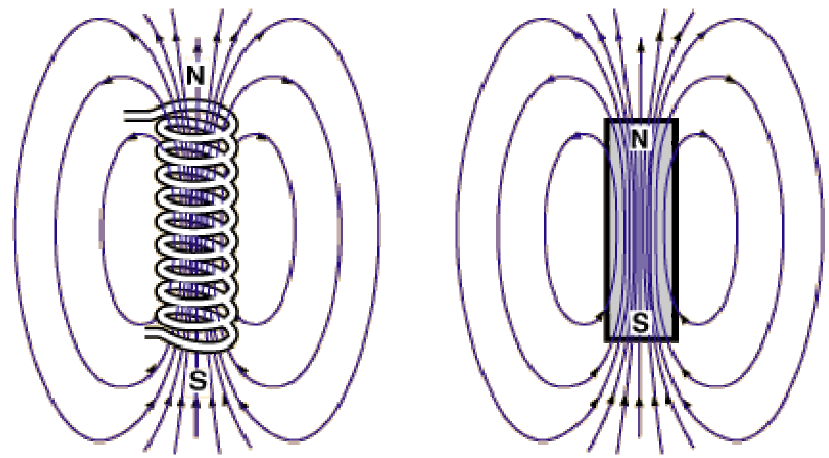


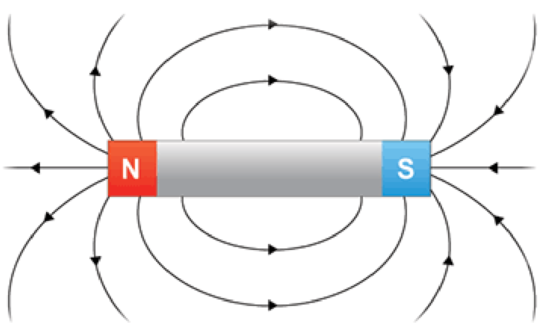
Нехомогено електрично поље може изазвати и ротационо и транслаторно кретање електричног дипола.

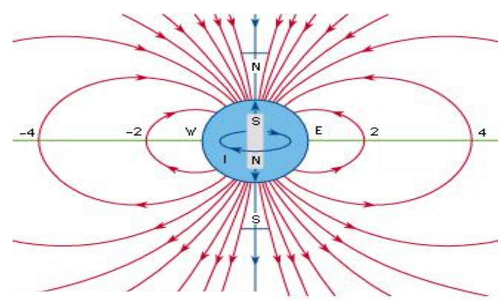
Магнетни дипол - подсећање



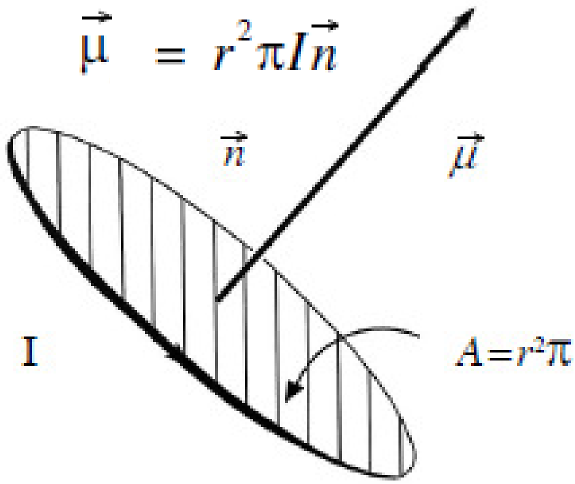




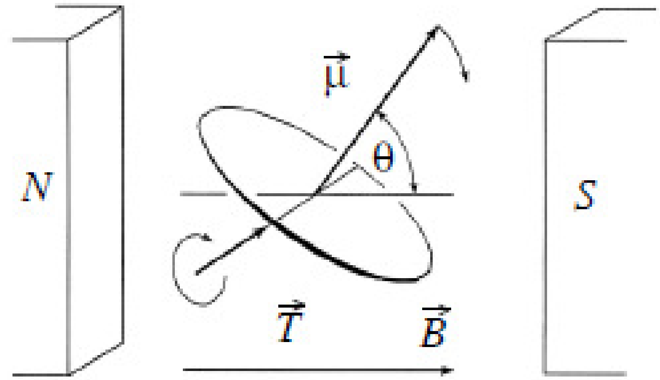




Магнетни момент штапићастог магнета



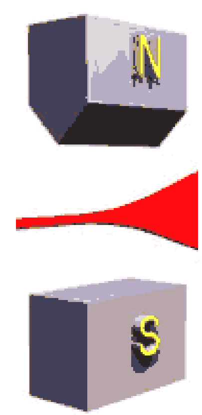
Магнетни момент струјне контуре



$$\vec{M} = \vec{\mu}_{\mathrm{mag}} \times \vec{B}$$

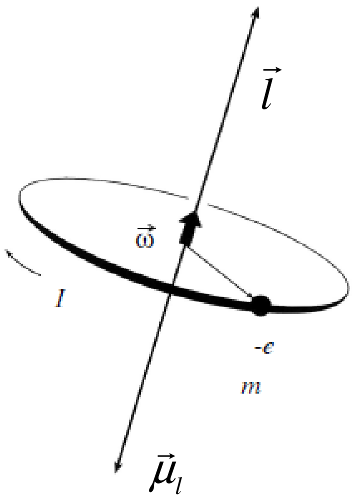
$$U = -\vec{\mu}_{\mathrm{mag}} \cdot \vec{B}$$

Хомогено магнетно поље може изазвати ротационо, али не и транслаторно кретање магнетног дипола.



Нехомогено магнетно поље може изазвати и ротационо и транслаторно кретање магнетног дипола.

Орбитни и спински магнетни момент електрона . . .



$$\left|\vec{l}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{p}\right| = \left|\vec{r}\times m\vec{v}\right| = mvr = m\omega r^2$$

$$\left|\vec{\mu}_l\right| = IS = \frac{-e}{T}r^2\pi = \frac{-e\omega}{2\pi}r^2\pi = \frac{-e\omega r^2}{2}$$

$$\vec{\mu}_l = -\frac{e}{2m}\vec{l}$$

Однос магнетног и угаоног момента се назива жиромагнетни однос. За електрон, орбитни жиромагнетни однос је:

$$\gamma_l = -\frac{e}{2m}, \quad \gamma_l < 0$$

Како је јединица за $\left|\vec{l}\right|$ једнака $\hbar$, јединица за $\left|\vec{\mu}_l\right|$ је једнака:

$$\frac{e}{2m}\hbar = \mu_B$$

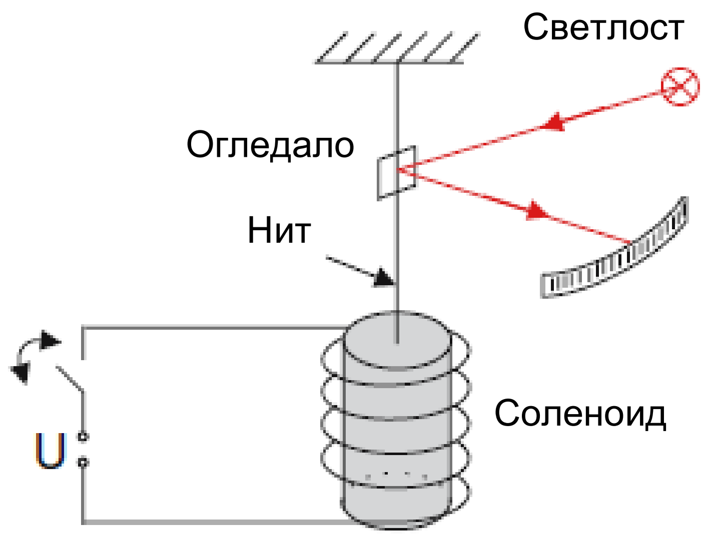
Боров магнетон – квант електронског парамагнетизма

Спински жиромагнетни однос електрона је:

$$\gamma_s = \frac{\left|\vec{\mu}_s\right|}{\left|\vec{s}\right|} = 2.0023193043617\gamma_l \approx 2\gamma_l \neq \gamma_l$$

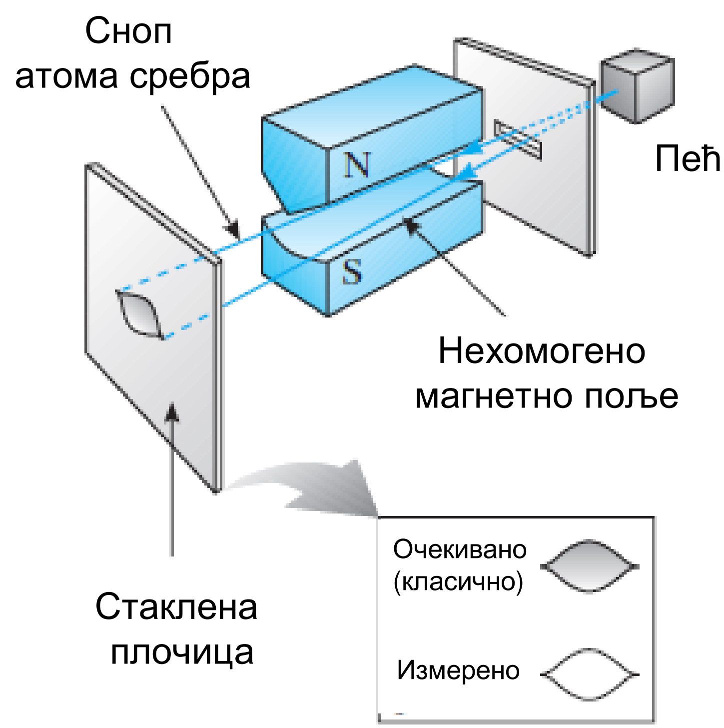
$$g_x = \frac{\gamma_x}{\gamma_l}$$

Ајнштајн-де Хасов експеримент (1915)



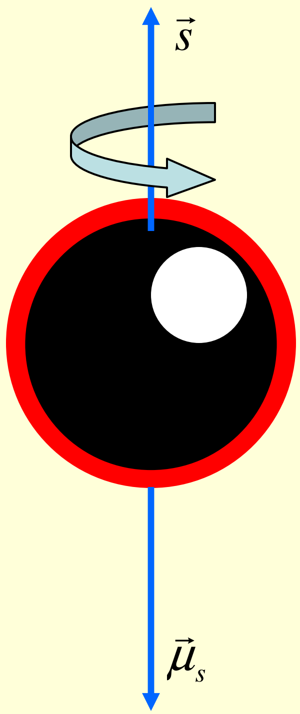
Упоређивањем промена угаоног момента и магнетизације гвозденог цилиндра дошло се до закључка да је његов жиромагнетни однос (који потиче од слободних електрона у њему) **дупло** већи од орбитног жиромагнетног односа електрона.

Штерн-Герлахов оглед (1922)



Атомски магнетни моменти **постоје**, а просторно квантовање је **реалност** која не егзистира само у мозговима теоретичара.

Невоље класичног модела електрона



$$C = \frac{\Delta q}{\Delta \varphi}, \quad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} \quad \rightarrow \quad C = 4\pi\varepsilon_0 r$$

$$\mathrm{d}A = \varphi \mathrm{d}q \rightarrow A = \int_0^{q_0} \varphi \mathrm{d}q = \int_0^{q_0} \frac{q}{C}\mathrm{d}q = \frac{q_0^2}{2C}$$

За довођење десет кулона наелектрисања на површину просечне трешње потребна је енергија једнака оној која је ослобођена у експлозији атомске бомбе бачене на Хирошиму.

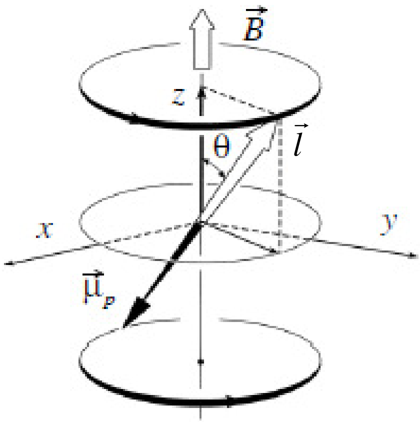
$$A = E = mc^2 \quad \rightarrow \quad \frac{q_0^2}{2\cdot 4\pi\varepsilon_0 r} = mc^2 \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0^2}{mc^2} = 1,4\cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

Ако претпоставимо да расподела наелектрисања није површинска него запреминска, рачун даје дупло већу вредност за тзв. класични полупречник електрона:

$$r = 2,8\cdot 10^{-15}\ \mathrm{m}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \hbar\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad |\vec{s}| = I\omega = \frac{2}{5}mr^2\omega \quad \rightarrow \quad v_{\mathrm{ekv.}} = \omega r = \frac{5\hbar\sqrt{3}}{4mr} = 9\cdot 10^{10}\ \mathrm{m/s} = 300c\ \ !!!$$

. . . и њихово понашање у магнетном пољу



$$\vec{M} = \vec{\mu}_l \times \vec{B}, \quad \vec{M} = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \gamma_l \vec{l} \times \vec{B}$$

$$l_x = |\vec{l}| \sin\theta \cos(\omega t), \quad l_y = |\vec{l}| \sin\theta \sin(\omega t), \quad l_z = |\vec{l}| \cos\theta$$

$\omega = -\gamma_l B$, Ларморова фреквенција

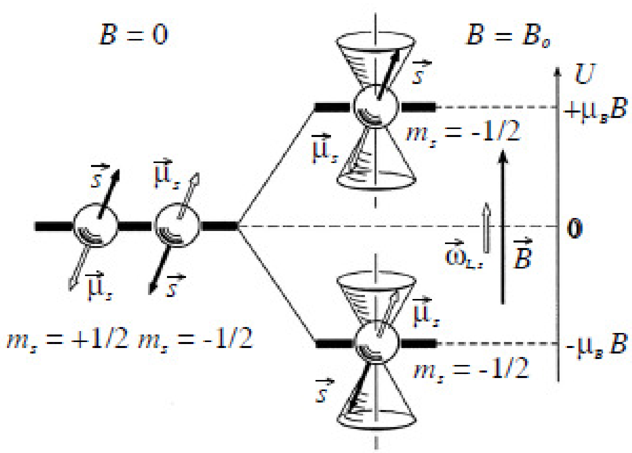
Из квантне механике

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \quad l = 0,1,2,\dots,n-1$$

$$l_z = m_l\hbar, \quad m_l = -l, -l+1, \dots, l-1, l$$

$$U = -\vec{\mu}_l \cdot \vec{B} = -|\vec{\mu}_l| B\cos\theta = -\mu_{l,z}B = m_l \mu_B B$$

Енергија интеракције орбитног магнетног момента са спољашњим магнетним пољем



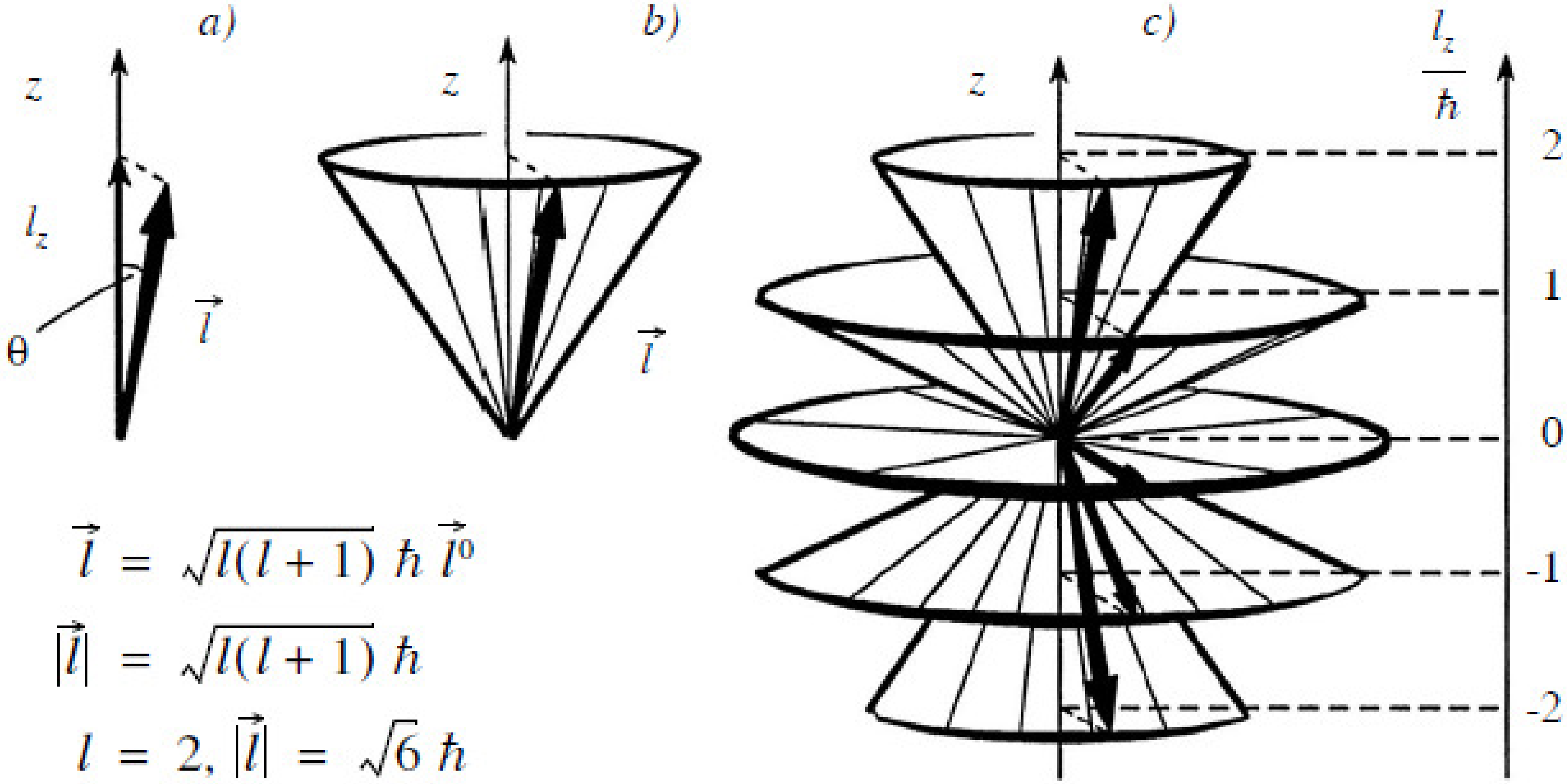
$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar = \hbar\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, јер s може да има само једну вредност, $s = +1/2$.

$$s_z = m_s\hbar, \quad m_s = -1/2, +1/2$$

$$U = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = \dots = g_s m_s \mu_B B$$

Енергија интеракције спинског магнетног момента са спољашњим магнетним пољем

Векторски модел атома

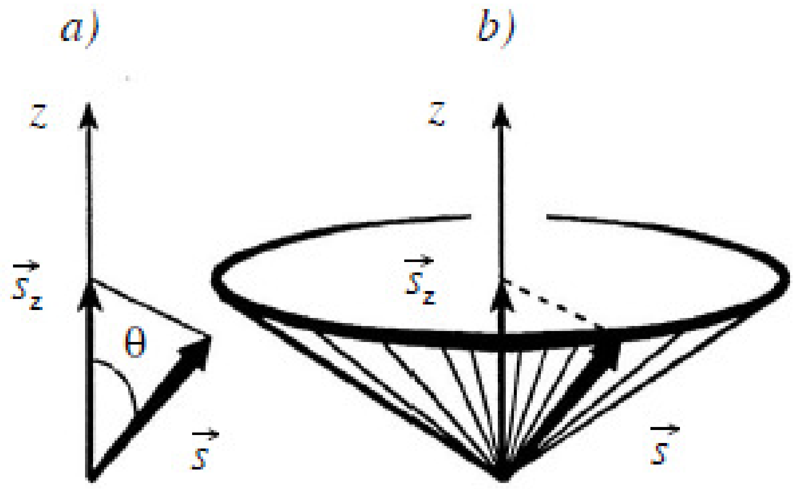


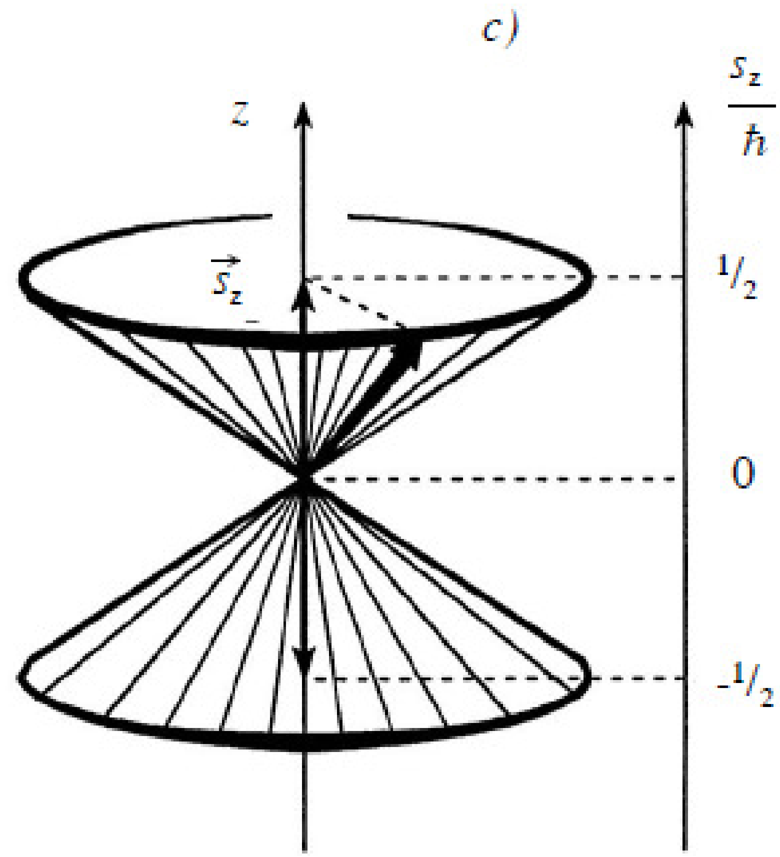
$$\vec{l} = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar\,\vec{l}^0$$

$$|\vec{l}| = \sqrt{l(l+1)}\,\hbar$$

$$l = 2,\ |\vec{l}| = \sqrt{6}\,\hbar$$

$$\cos\theta = \frac{l_z}{|\vec{l}|} = \frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}$$





$$\vec{s} = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar\,\vec{s}^{\,0}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)}\,\hbar$$

$$s = {}^1/_2\,, \qquad |\vec{s}| = \sqrt{3}\,\hbar/2$$

Механизам спрезања момената

$$\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \gamma_s \vec{s} \times \vec{B}_l \qquad \vec{B}_l = k_l(x_s, y_s, z_s)\vec{\mu}_l = k_l(x_s, y_s, z_s)\gamma_l \vec{l}$$

$$\vec{B}_l, \vec{B}_s \neq const.$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \gamma_l \vec{l} \times \vec{B}_s \qquad \vec{B}_s = k_s(x_l, y_l, z_l)\vec{\mu}_s = k_s(x_l, y_l, z_l)\gamma_s \vec{s}$$

Како енергија интеракције не може да зависи од координатног система, следи:

$$-\vec{\mu}_l \cdot \vec{B}_s = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_l$$

$$-\vec{\mu}_l \cdot k_s(x_l, y_l, z_l)\vec{\mu}_s = -\vec{\mu}_s \cdot k_l(x_s, y_s, z_s)\vec{\mu}_l$$

$$k_s(x_l, y_l, z_l) = k_l(x_s, y_s, z_s) = K$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \gamma_s \vec{s} \times \vec{B}_l + \gamma_l \vec{l} \times \vec{B}_s = \gamma_s \vec{s} \times K \gamma_l \vec{l} + \gamma_l \vec{l} \times K \gamma_s \vec{s} = \gamma_s \gamma_l K \left(\vec{s} \times \vec{l} + \vec{l} \times \vec{s} \right) = 0$$

$$\boxed{\vec{l} + \vec{s} = const.}$$

Укупни угаони момент

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\left|\vec{j}\right| = \sqrt{j(j+1)}\hbar, \quad j = |l+s|, |l+s-1| \ldots, |l-s|$$

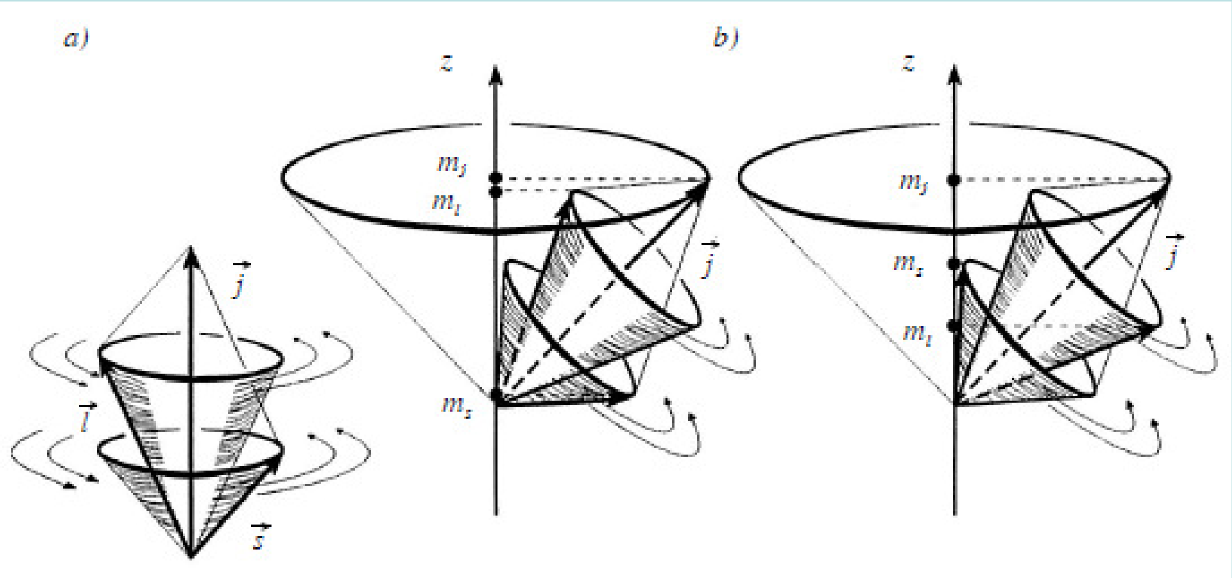
$$j_z = m_j\hbar, \quad m_j = -j, -j+1, \ldots, j-1, j$$

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\sqrt{j(j+1)} \neq \sqrt{l(l+1)} + \sqrt{s(s+1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \gamma_l\gamma_s K\left(\vec{s}\times\vec{l}\right) = \gamma_l\gamma_s K\left(\vec{s}\times\vec{l} + \underbrace{\vec{s}\times\vec{s}}_{0}\right) = \gamma_l\gamma_s K\vec{s}\times\left(\vec{l}+\vec{s}\right) = \gamma_l\gamma_s K\vec{s}\times\vec{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \gamma_l\gamma_s K\vec{l}\times\vec{j}$$



Систем спрегнутих вектора, добри квантни бројеви су: l, s, j, m_j

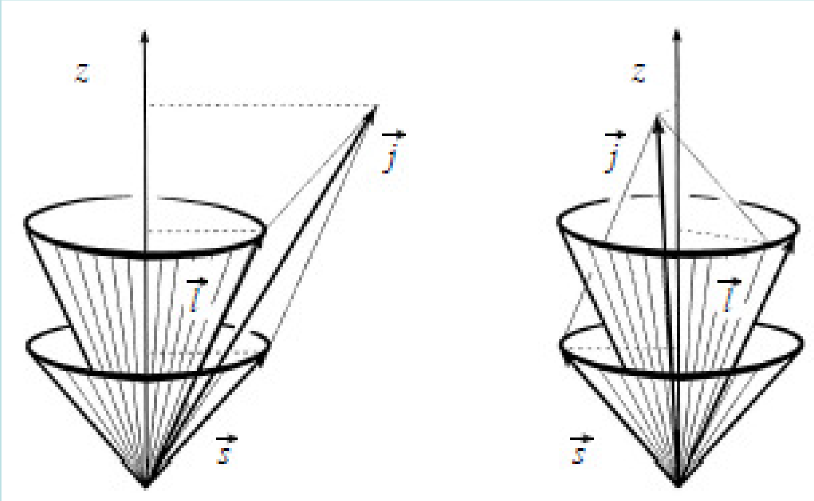
$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = \left(\vec{l}+\vec{s}\right)\cdot\left(\vec{l}+\vec{s}\right) =$$

$$= \vec{l}\cdot\vec{l} + \vec{s}\cdot\vec{s} + 2\vec{l}\cdot\vec{s}$$

$$\left|\vec{j}\right|^2 = \left|\vec{l}\right|^2 + \left|\vec{s}\right|^2 + 2\left|\vec{l}\right|\left|\vec{s}\right|\cos\left(\vec{l},\vec{s}\right)$$

$$\cos\left(\vec{l},\vec{s}\right) = \frac{\left|\vec{j}\right|^2 - \left|\vec{l}\right|^2 - \left|\vec{s}\right|^2}{2\left|\vec{l}\right|\left|\vec{s}\right|} = \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}}$$



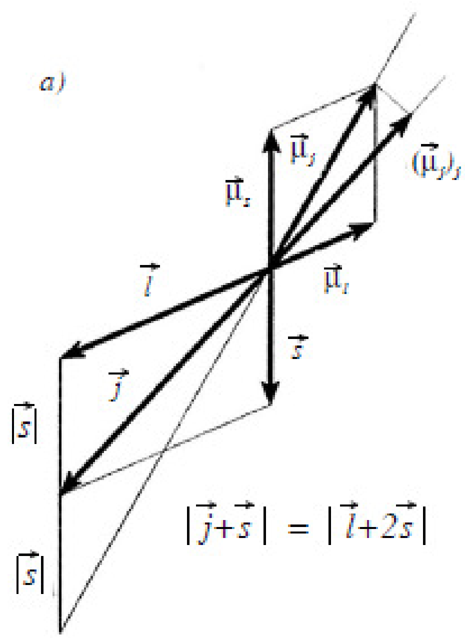
Систем неспрегнутих/распрегнутих вектора, добри квантни бројеви су:

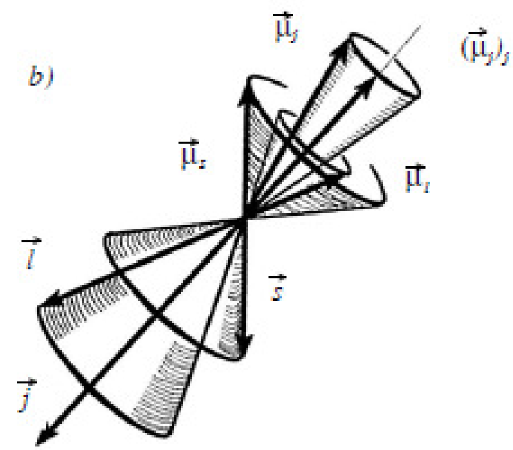
$$l, s, m_l, m_s$$

Укупни магнетни момент

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s$$

$$\vec{\mu}_j = \vec{\mu}_l + \vec{\mu}_s = \gamma_l \vec{l} + \gamma_s \vec{s} \approx \gamma_l \vec{l} + 2\gamma_l \vec{s} = \gamma_l \left(\vec{l} + 2\vec{s} \right) = \gamma_l \left(\vec{j} + \vec{s} \right) = -\frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{j} + \vec{s} \right) \qquad \vec{\mu}_j \nparallel \vec{j}$$





$$\vec{\mu}_j \cdot \vec{j} = -\frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{j}+\vec{s}\right)\cdot\vec{j}$$

$$\left|\vec{\mu}_j\right|\left|\vec{j}\right|\cos(\vec{\mu}_j,\vec{j}) = -\frac{\mu_B}{\hbar}\left(\vec{j}\cdot\vec{j}+\vec{s}\cdot\vec{j}\right)$$

$$\left|\vec{j}\right|\left|(\vec{\mu}_j)_j\right| = \left|\vec{j}\right|\left(-g_j\frac{\mu_B}{\hbar}\left|\vec{j}\right|\right) = -g_j\frac{\mu_B}{\hbar}\left|\vec{j}\right|^2$$

$$\vec{\mu}_m = g_m\gamma_l\vec{m}$$

$$\downarrow$$

$$\left(\vec{\mu}_j\right)_j = g_j\gamma_l\vec{j} = -g_j\frac{\mu_B}{\hbar}\vec{j}$$

$$\vec{j} = \vec{l}+\vec{s}$$

$$\vec{l} = \vec{j}-\vec{s}$$

$$\vec{l}\cdot\vec{l} = \left(\vec{j}-\vec{s}\right)\cdot\left(\vec{j}-\vec{s}\right) =$$

$$= \left|\vec{j}\right|^2+\left|\vec{s}\right|^2-2\vec{j}\cdot\vec{s}$$

$$2\vec{s}\cdot\vec{j} = \left|\vec{j}\right|^2+\left|\vec{s}\right|^2-\left|\vec{l}\right|^2$$

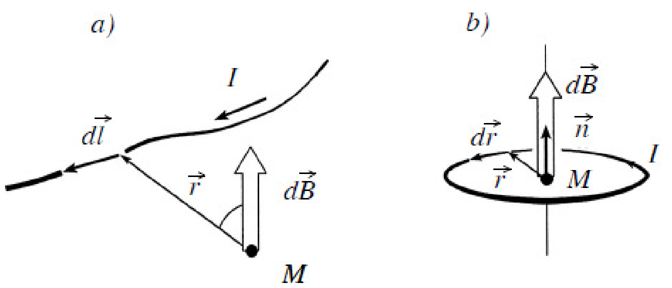
$$g_j\left|\vec{j}\right|^2 = \vec{j}\cdot\vec{j}+\vec{s}\cdot\vec{j}$$

$$g_j = 1+\frac{\vec{s}\cdot\vec{j}}{\left|\vec{j}\right|^2}$$

$$g_j = 1+\frac{\left|\vec{j}\right|^2+\left|\vec{s}\right|^2-\left|\vec{l}\right|^2}{2\left|\vec{j}\right|^2}$$

$$g_j = 1+\frac{j(j+1)-l(l+1)+s(s+1)}{2j(j+1)}$$

Спин-орбитна интеракција



Био-Саваров закон, $\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{L}}{|\vec{r}|^3}$,

примењен на центар кружне контуре кроз коју протиче константна струја, даје:

$$\left(\vec{r}\times\mathrm{d}\vec{L} = r\mathrm{d}L\sin 90^\circ\,\vec{n} = r r\mathrm{d}\theta\vec{n} = r^2\mathrm{d}\theta\vec{n}\right) \;\rightarrow\; \mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\theta}{r}\vec{n}$$

$$\vec{B} = \int_0^{2\pi} \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}\theta}{r}\vec{n} = \frac{\mu_0 I}{2r}\vec{n} \qquad I = \frac{+Ze}{T} = \frac{Ze\omega}{2\pi} = \frac{Zel}{2\pi m r^2} \qquad \vec{B}_\mathrm{e} = \frac{\mu_0}{2r}\vec{n}\frac{Zel}{2\pi m r^2} = \frac{Ze\mu_0}{4\pi m r^3}\vec{l}$$

$$\vec{B}_\mathrm{p} = \frac{1}{2}\vec{B}_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\frac{Ze\mu_0}{4\pi m r^3}\vec{l} \quad\rightarrow\quad U = -\vec{\mu}_s\cdot\vec{B}_\mathrm{p} = -\gamma_s\vec{s}\cdot\vec{B}_\mathrm{p} = \frac{e}{m}\vec{s}\cdot\frac{1}{2}\frac{Ze\mu_0}{4\pi m r^3}\vec{l}$$

$$U = \frac{1}{2}\frac{Ze^2\mu_0}{4\pi m^2 r^3}\vec{l}\cdot\vec{s}$$

$$U = a\frac{\vec{l}\cdot\vec{s}}{\hbar^2}, \quad a = \frac{1}{2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Ze^2\hbar^2}{m^2 r^3}$$

$$\left(\begin{array}{c} r \sim \dfrac{n^2}{Z}, a \sim Z^4; \\ \left\langle \dfrac{1}{r^3}\right\rangle = \dfrac{Z^3}{a_0^3}\dfrac{1}{n^3 l(l+1/2)(l+1)} \end{array}\right)$$

$$U = a\frac{\vec{l}\cdot\vec{s}}{\hbar^2} = \frac{1}{2}a\left[j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)\right]$$

Спин-орбитно цепање другог нивоа за атом водоника и првих седам водоникоидних јона

Z	ΔE / cm^{-1}
1	0.365229
2	5.84366
3	29.5835
4	93.4986
5	228.268
6	473.337
7	876.914
8	1495.98