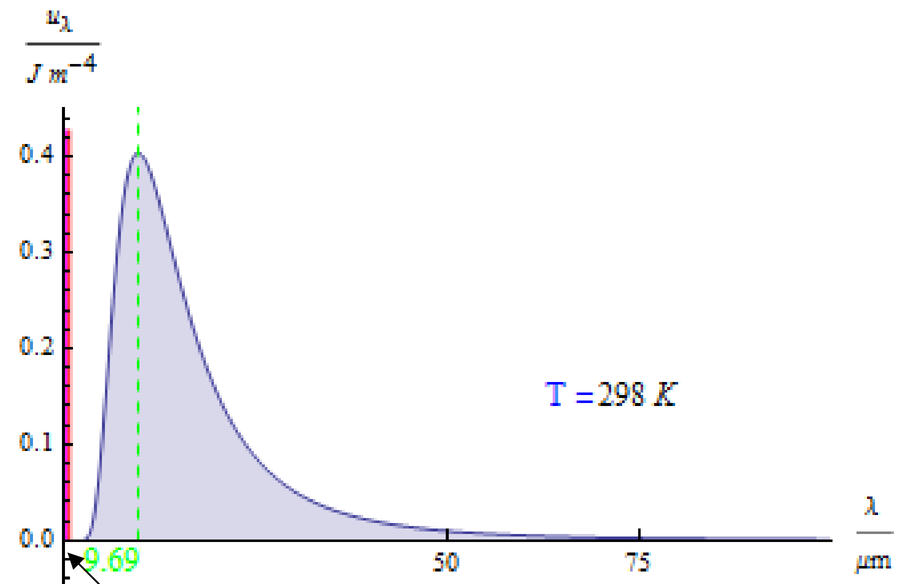
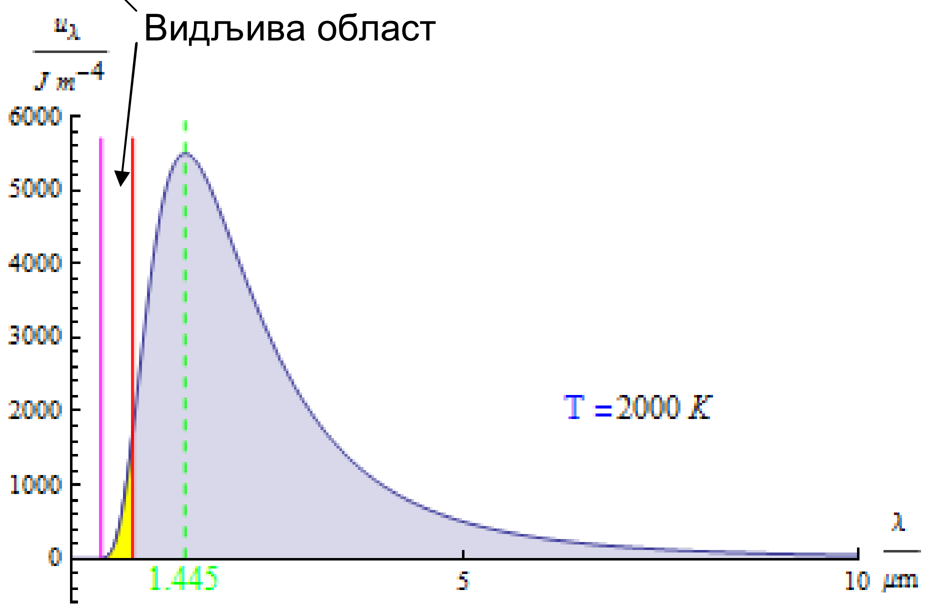
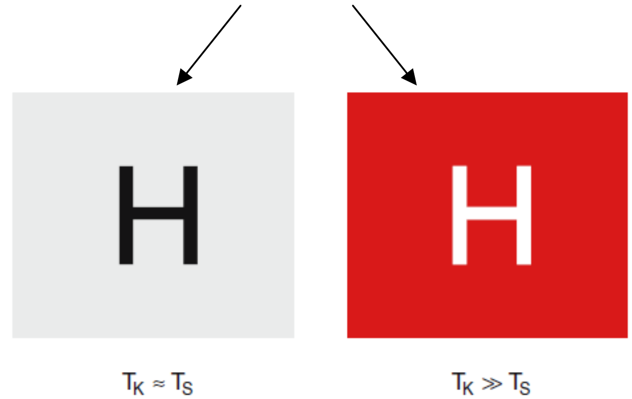
Зрачење црног тела – Планков закон

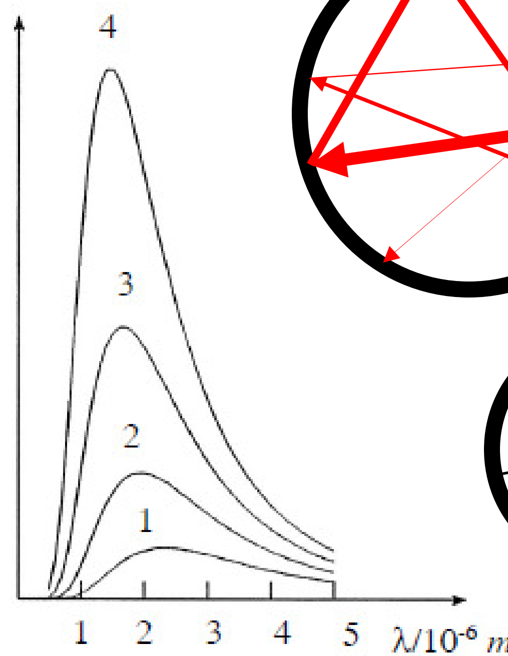


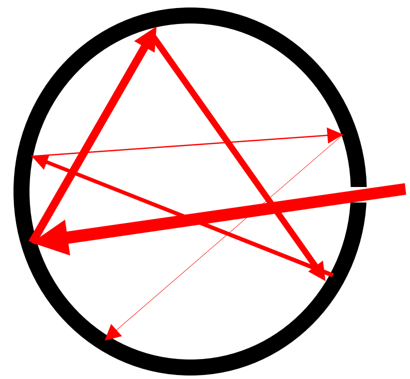
Видљива област

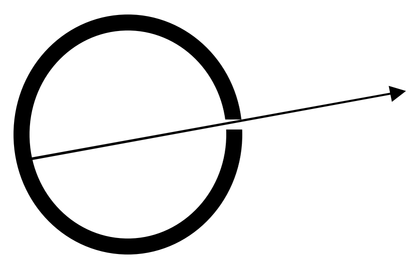


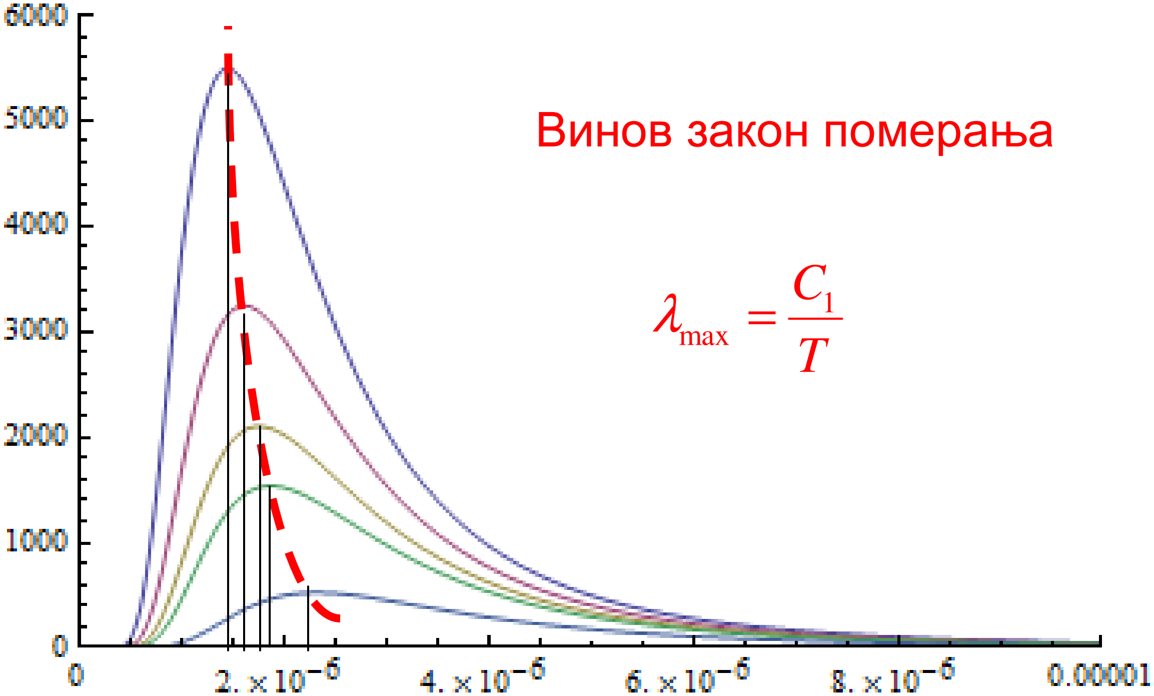
<u>Исти</u> комад угља (на различитим температурама)





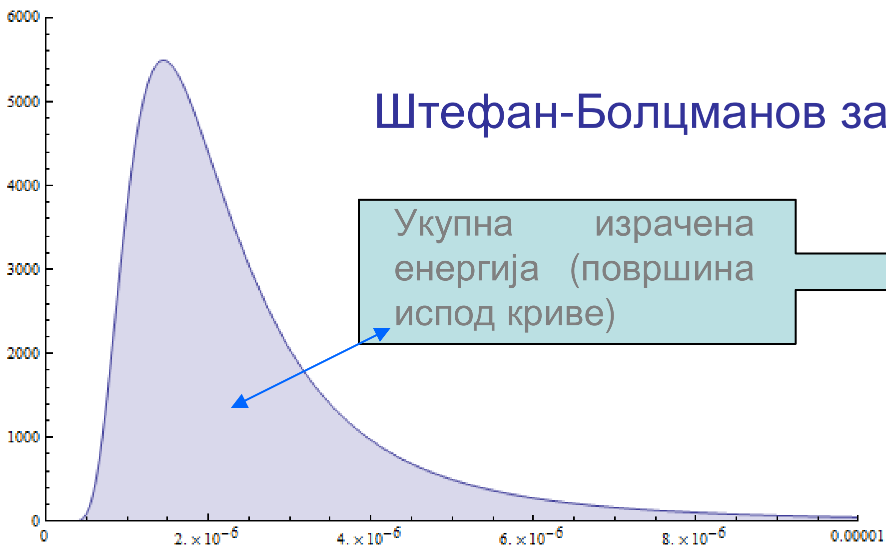






Винов закон померања

$$\lambda_{max} = \frac{C_1}{T}$$



Штефан-Болцманов закон

Укупна израчена енергија (површина испод криве)

$$= \sigma T^4$$

. . . што баш и не звучи као термодинамичка равнотежа . . .

На собној температури (298 K):

Густина енергије зрачења у шупљини је: $6 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J/m^3}$

Густина енергије у комаду гвожђа је: $6 \cdot 10^{8}\ \mathrm{J/m^3}$

(У једном кубном центиметру шупљине има укупно око 537 милиона фотона. Од тога 96% фотона има таласне дужине између 1 и 100 микрометара и они носе 99,5% укупне енергије која се налази у шупљини)

На температури Бунзеновог пламеника (1800~2000 K):

Густина енергије зрачења у шупљини је: $1,2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{J/m^3}$

Густина енергије у комаду гвожђа је: $6 \cdot 10^{9}\ \mathrm{J/m^3}$

(У једном кубном центиметру шупљине има укупно око $1,62 \cdot 10^{11}$ фотона. Од тога 92% фотона има таласне дужине између 0,1 и 10 микрометара и они носе 98,6% укупне енергије која се налази у шупљини)

Осцилације

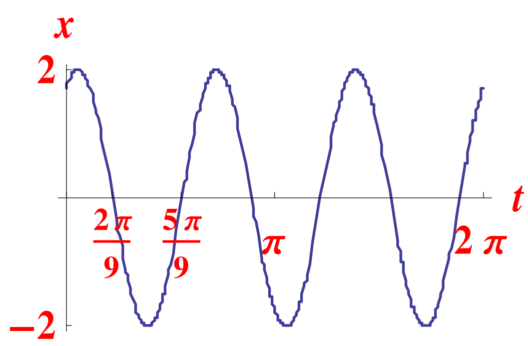
$$\vec{F} = -k\vec{r}$$

$$\downarrow \text{1D}$$

$$m\frac{d^2x}{d^2t} + kx = 0$$

$$\downarrow \omega = \sqrt{k/m}$$

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$



$$x(t) = 2\sin(3t + \pi/3)$$

$$E = T + U = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mx_0^2\omega^2 = \text{const.}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

$$E = 2\pi^2 m\nu^2 x_0^2$$

$$E \sim \nu^2$$

Честица која (хармонијски) осцилује се креће дуж **једног** правца (у оба смера), а не по синусоиди. Другим речима, синусна функција не представља трајекторију честице, него зависност њене координате од времена. Трајекторија је права линија.

Таласи

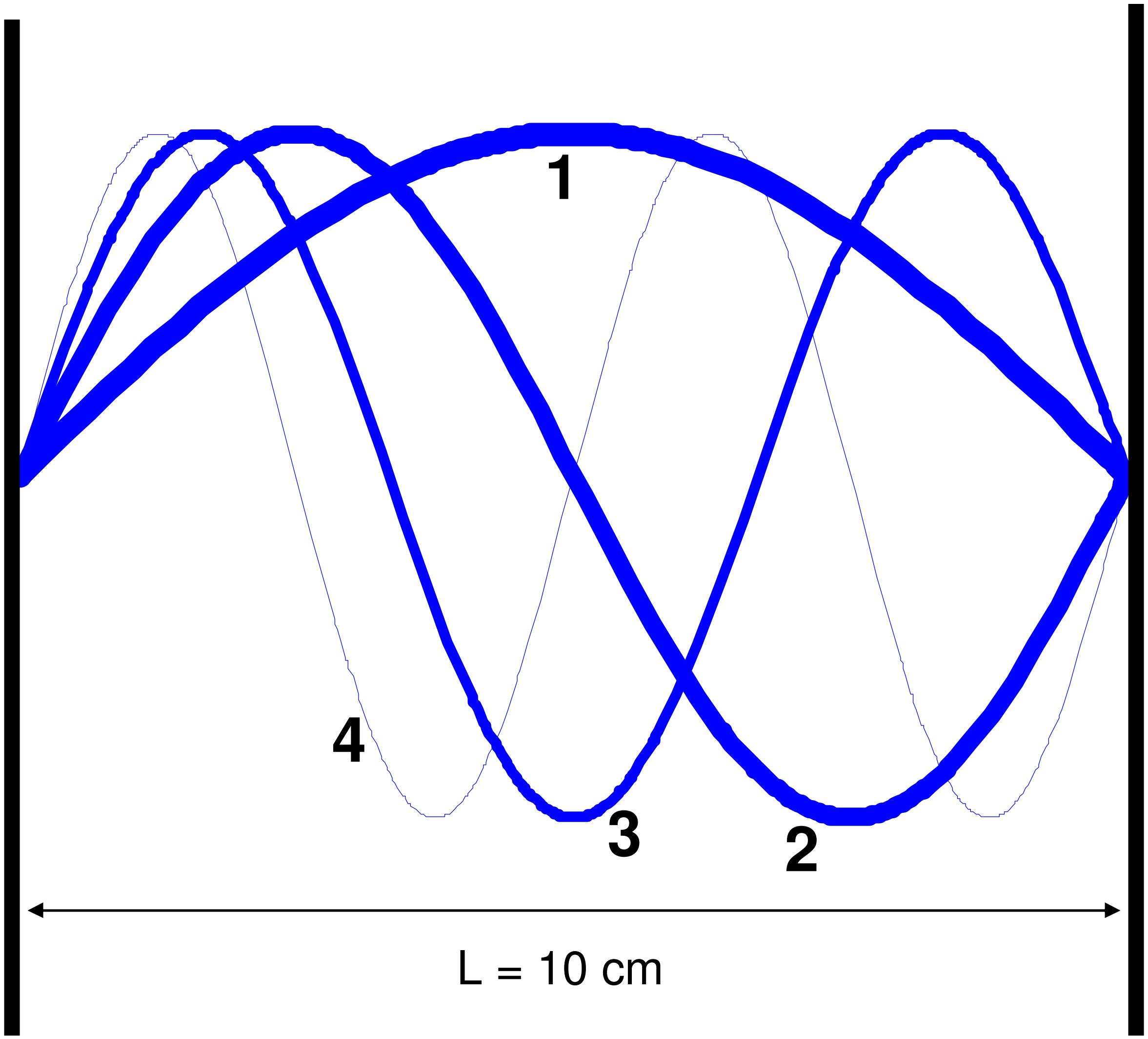
Талас је поремећај/промена који се простире кроз простор и време.

Светлост - поремећај електричног и магнетног поља
Звук – поремећај ваздушног притиска
Таласи на води – поремећај нивоа воде

$$\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{s}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{s}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{s}}{\partial t^2}$$

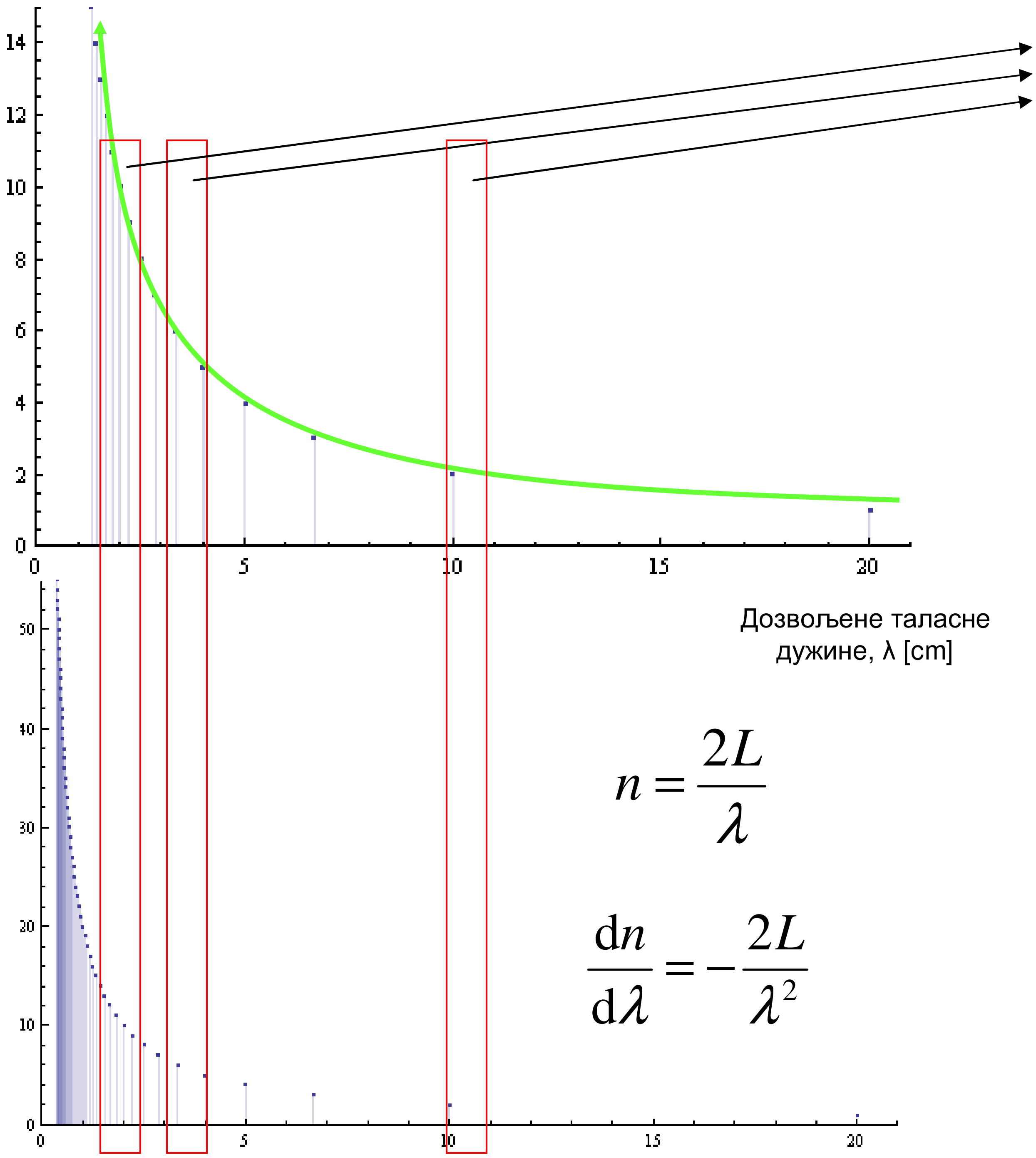
$$s(x,t) = s_0 \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Стојећи таласи - једнодимензиони случај



n	λ / cm
1	20
2	10
3	6,67
4	5
5	4
6	3,33

$$L = \frac{\lambda_1}{2} = 2\frac{\lambda_2}{2} = 3\frac{\lambda_3}{2} = \ldots = n\frac{\lambda_n}{2},\ n \in N \quad \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n},\ n \in N$$



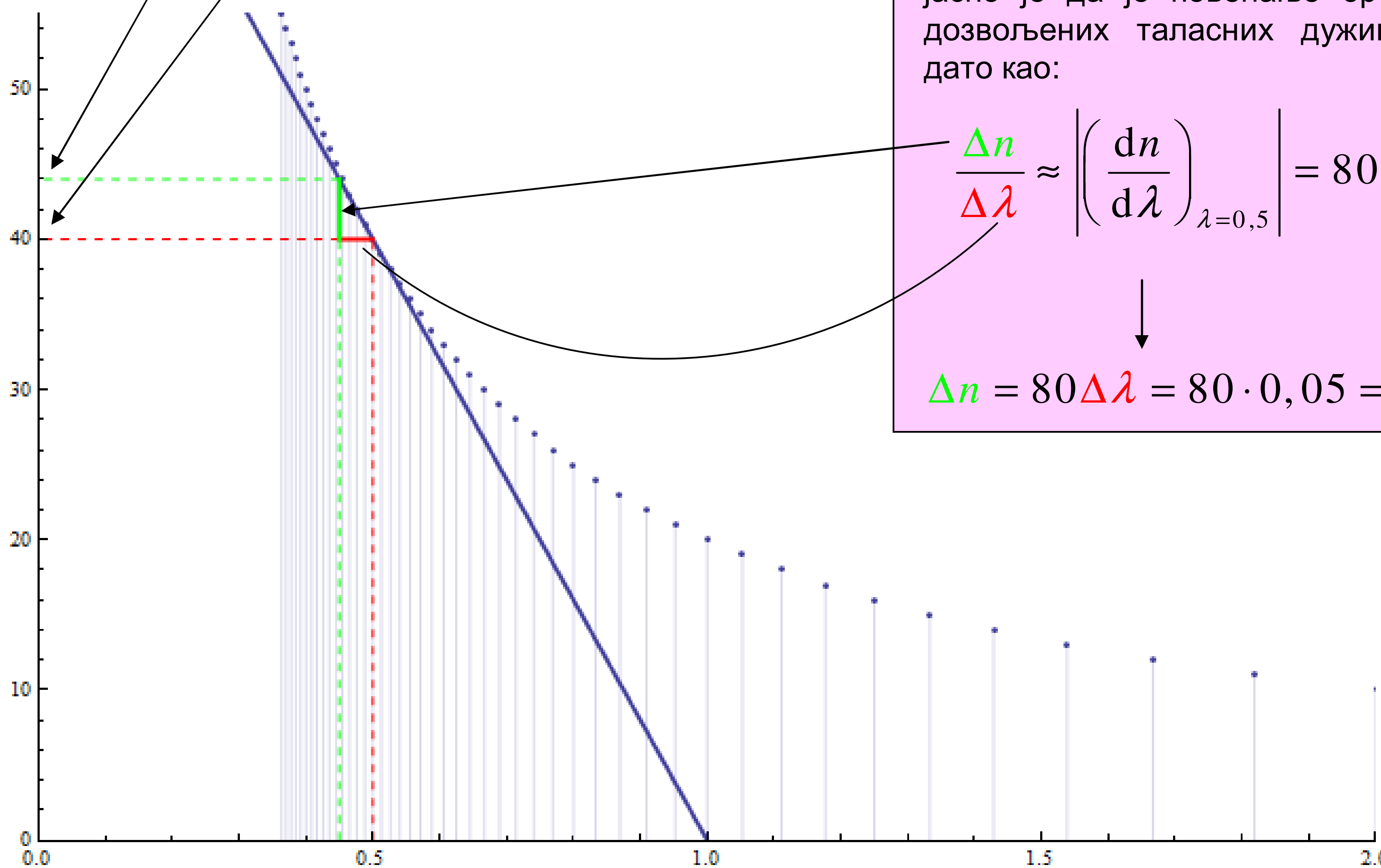
За **дату** ширину интервала таласних дужина, **више** ћемо дозвољених таласних дужина наћи на **мањим** таласним дужинама.

$$n = \frac{2L}{\lambda}$$

$$\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda} = -\frac{2L}{\lambda^2}$$

Тражећи дозвољене таласне дужине директно – нпр. на λ = 0,5 cm – са графика видимо да их на ширини интервала од $\Delta\lambda$ = 0,05 cm на лево, можемо наћи 4.

$$\Delta n = 44 - 40 = 4$$



С друге стране, користећи први извод функције у тачки (0,5; 40)

$$\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda=0,5} = -80$$

јасно је да је повећање броја дозвољених таласних дужина, дато као:

$$\frac{\Delta n}{\Delta\lambda} \approx \left|\left(\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\right)_{\lambda=0,5}\right| = 80$$

$$\Delta n = 80\Delta\lambda = 80 \cdot 0,05 = 4$$

Стојећи таласи - тродимензиони случај

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\left(\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}+E_z\vec{k}\right)$$

$$\downarrow$$

$$E_x = A_x \cos\frac{n_x \pi x}{L}\sin\frac{n_y \pi y}{L}\sin\frac{n_z \pi z}{L}\sin\omega t$$

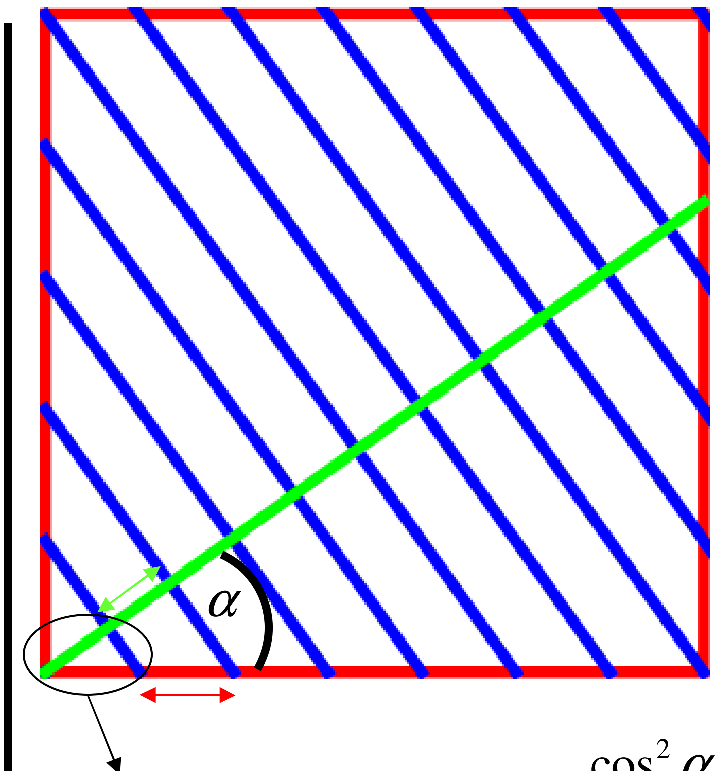
$$E_y = A_y \sin\frac{n_x \pi x}{L}\cos\frac{n_y \pi y}{L}\sin\frac{n_z \pi z}{L}\sin\omega t$$

$$E_z = A_z \sin\frac{n_x \pi x}{L}\sin\frac{n_y \pi y}{L}\cos\frac{n_z \pi z}{L}\sin\omega t$$

$$\downarrow$$

$$\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=\frac{4L^2}{\lambda^2}$$

$$\left(n_x, n_y, n_z \in N\right)$$



$$\lambda = \lambda_x \cos\alpha$$

$$\lambda_x = \frac{\lambda}{\cos\alpha}=\frac{2L}{n_x}$$

$$\lambda_y = \frac{\lambda}{\cos\beta}=\frac{2L}{n_y}$$

$$\lambda_z = \frac{\lambda}{\cos\gamma}=\frac{2L}{n_z}$$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

$$\left(\frac{\lambda n_x}{2L}\right)^2+\left(\frac{\lambda n_y}{2L}\right)^2+\left(\frac{\lambda n_z}{2L}\right)^2=1$$

$$\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=\frac{4L^2}{\lambda^2}$$

Рејлијев број – број осцилатора (стојећих таласа)

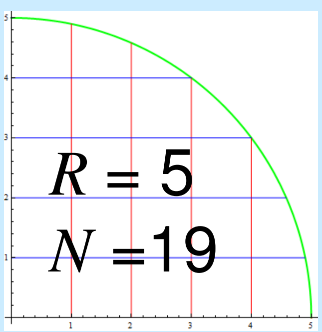
$$\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)=\frac{4L^2\nu^2}{c^2}$$

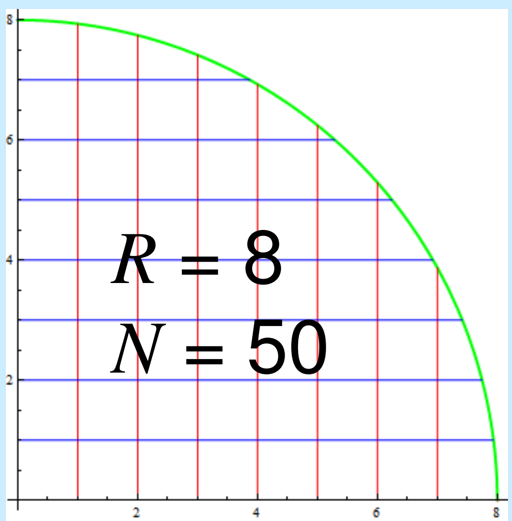
Свака уређена тројка *(n_x, n_y, n_z)* одређује јединствен правац у простору дуж кога се може формирати један трансверзалан стојећи талас.

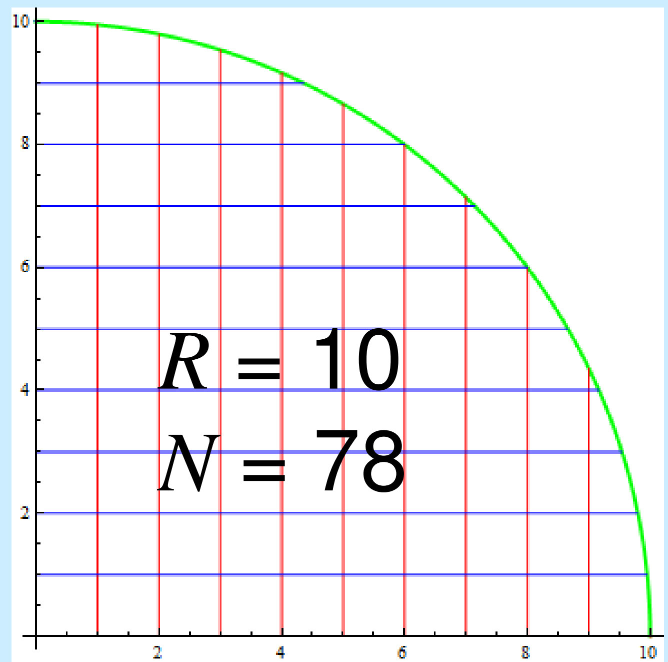
Пример за две димензије

Број осцилатора је једнак површини четвртине круга чији је полупречник дат једначином

$$N\approx\frac{R^2\pi}{4},\left(n_x^2+n_y^2\right)=R^2$$







$$N = \frac{1}{8} V_{lopte} = \frac{1}{8}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{2L\nu}{c}\right)^3 \pi\right] = \frac{4\pi\nu^3}{3c^3} L^3$$

У случају коцке јединичних димензија, $L = 1$, и имајући у виду да сваки трансверзални талас може да се добије сабирањем два линеарно поларизована таласа чије су равни поларизације узајамно нормалне:

$$N = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3}$$

Број осцилатора (стојећих таласа) који се налазе у интервалу $(\nu,\ \nu + \mathrm{d}\nu)$ добијамо, као и мало пре, диференцирањем:

$$\frac{\mathrm{d}N}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

По теореми о еквипартицији енергије, сваком степену слободе кретања припада енергија:

$$kT\ /\ 2$$

Како је енергија осцилатора једнака збиру кинетичке и потенцијалне, следи да ће средња енергија по осцилатору бити једнака:

$$\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT$$

Међутим, ово резоновање неизбежно води у тзв. ултраљубичасту катастрофу,

$$E = NkT = \frac{8\pi\nu^3}{3c^3} kT \rightarrow \infty$$

јер како фреквенције светлости могу бити произвољно велике произилази да укупна израчена енергија тежи бесконачности.

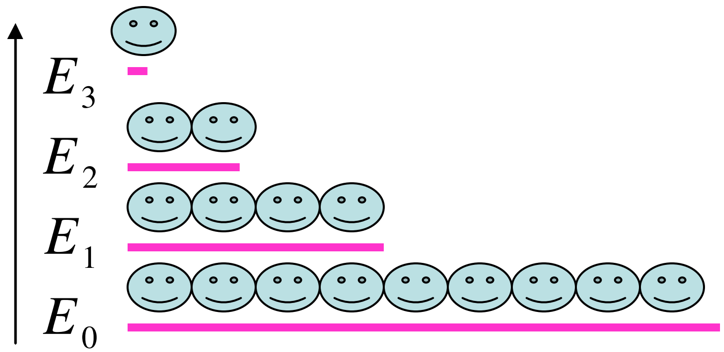
Планков закон

$$E = n \cdot h\nu$$

‘Данас сам направио откриће равно Њутновом’

Полазећи од тога да је енергија осцилатора квантирана величина, као и да важи Болцманов закон расподеле, можемо видети:

N_0	$0 \cdot h\nu$
N_1	$1 \cdot h\nu$
N_2	$2 \cdot h\nu$
$\vdots$	$\vdots$
N_i	$i \cdot h\nu$

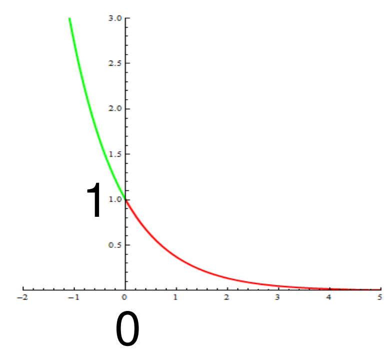


$$N_i = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E_i}{kT}} = N_0 \mathrm{e}^{-\frac{E_i - E_0}{kT}}$$

$$E_{\mathrm{sr}} = \frac{E_{\mathrm{uk}}}{N_{\mathrm{uk}}} = \frac{N_0 E_0 + N_1 E_1 + \ldots}{N_0 + N_1 + \ldots} = \frac{N_0 \cdot 0 \cdot h\nu + N_1 \cdot 1 \cdot h\nu + \ldots}{N_0 + N_1 + \ldots} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (i \cdot h\nu) N_i}{\sum_{i=0}^{\infty} N_i}$$

$$E_{\mathrm{sr}} = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} (i \cdot h\nu) N_0 \mathrm{e}^{-\frac{E_i - E_0}{kT}}}{\sum_{i=0}^{\infty} N_0 \mathrm{e}^{-\frac{E_i - E_0}{kT}}} = h\nu \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i \mathrm{e}^{-\frac{ih\nu}{kT}}}{\sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{ih\nu}{kT}}} = h\nu \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i y^i}{\sum_{i=0}^{\infty} y^i},$$ где је $y = \mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}}$

Како је $\frac{h\nu}{kT} > 0$ следи да важи и $0 < y = \mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}} < 1$



$$\sum_{i=0}^{\infty} y^i = \lim_{n\to\infty}\left(y^0 + y^1 + \dots y^n\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{y^{n+1}-1}{y-1} = \frac{1}{1-y}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} i y^i = \sum_{i=0}^{\infty} y\frac{\mathrm{d}(y^i)}{\mathrm{d}y} = y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{i=0}^{\infty} y^i = y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{y}{(1-y)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{1-y}\right) =$$

$$= \left((1-y)^{-1}\right)' =$$

$$= (-1)(1-y)^{-2}(1-y)' =$$

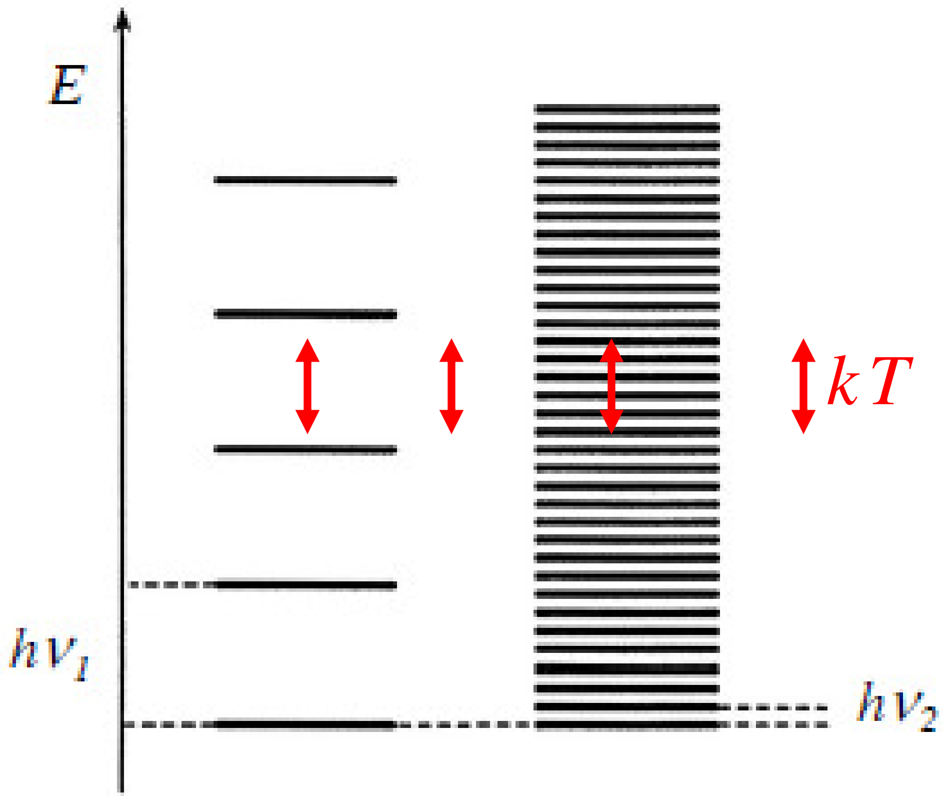
$$= (1-y)^{-2}$$

$$E_{\mathrm{sr}} = h\nu\frac{\sum_{i=0}^{\infty} i y^i}{\sum_{i=0}^{\infty} y^i} = h\nu\frac{\frac{y}{(1-y)^2}}{\frac{1}{1-y}} = h\nu\frac{y}{(1-y)} = h\nu\frac{\mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1-\mathrm{e}^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

$$\boxed{E_{\mathrm{sr}} = h\nu\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1}}$$

Енергија коју црно тело израчи у интервалу $(\nu,\ \nu+\mathrm{d}\nu)$

$$E_{\mathrm{sr}}\mathrm{d}N = h\nu\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\frac{8\pi\nu^2}{c^3}d\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu = u_\nu d\nu$$



Осцилације чија је фреквенција ν_2 имају већу вероватноћу да буду побуђене, а осцилације чија је фреквенција ν_1 мању.

$$h\nu \gg kT \rightarrow E_{sr} = h\nu \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx h\nu \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}} = h\nu\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}$$

$$h\nu \ll kT \rightarrow E_{sr} = h\nu \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \approx h\nu \frac{1}{\frac{h\nu}{kT} + 1 - 1} = kT$$

$$u_\lambda(\lambda,T)=\frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$ Густина (по јед. зап. и таласне дужине) енергије зрачења у шупљини [J m^{-4}]

$$\Delta u=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}u_\lambda(\lambda,T)\mathrm{d}\lambda$$ Густина (по јед. зап.) енергије зрачења у шупљини на интервалу (λ_1,λ_2) [J m^{-3}]

$$u(T)=\int_0^\infty u_\lambda(\lambda,T)\mathrm{d}\lambda\left(=\int_0^\infty u_\nu(\nu,T)\mathrm{d}\nu\right)=\frac{8\pi^5k^4T^4}{15h^3c^3}$$ Укупна густина (по јед. зап.) енергије зрачења у шупљини [J m^{-3}]

$$n_{\mathrm{fot}}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{u_\lambda(\lambda,T)}{hc/\lambda}\mathrm{d}\lambda=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}\mathrm{d}\lambda$$ Број фотона по јед. зап. у шупљини на интервалу (λ_1,λ_2) [fot / m^3]

$$n_{\mathrm{osc}}=\int_{\lambda_1}^{\lambda_2}\frac{8\pi}{\lambda^4}\mathrm{d}\lambda=8\pi\left(\frac{1}{\lambda_1^3}-\frac{1}{\lambda_2^3}\right)$$ Број осцилатора по јед. зап. у шупљини на интервалу (λ_1,λ_2)

$$\frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1}$$ Број фотона по осцилатору (стојећем таласу) на датој таласној дужини

$$u_\nu d\nu=u_\lambda d\lambda \qquad \lambda=c/\nu \qquad |\mathrm{d}\lambda|=\frac{c}{\nu^2}\mathrm{d}\nu \qquad |\mathrm{d}\nu|=\frac{c}{\lambda^2}\mathrm{d}\lambda$$

Примена

- Укупна снага Сунца
- Температура Сунца и других звезда
  (Винов закон; однос интензитета линија)
- Колико зрачи људско тело
- ИЦ камере
- Зрачење из свемира