

- Векторски модел атома -

- Боров модел (и Бр-Зомерфелдов) може да опише велики број појава + вези са графом и особинама атома (спектар H и сличних зона, орбитни магнетизам).

- То су полукласични модели - пружају интуитивну слику о атому (спин-орбита спрега, дублети код енергетских нивоа, прецесија спина + пауб орбитног момента)

- Али нису могуће разумејте спин-орбиту интеракцију као деловање локалног пауба електронског спина на орбитни магнетни момент - прецесија ОММ + спинског локалног магнетног пауба? Мора бити исправно јер израз не зависи од пермутације орбитног и спинског момента.

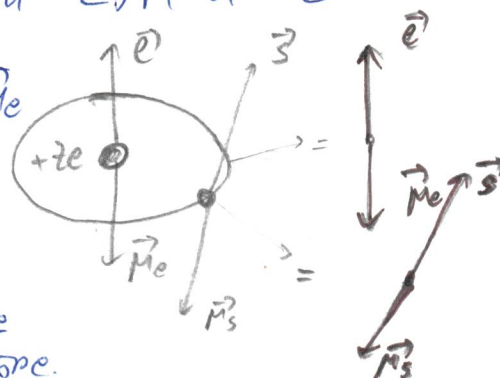
• **ЗАПРАВО**, и спински и орбитни момент прецесују истовремено око њихове резултанте.

↓
Уместо орбита, атомског језгра, ротирају електрона и осталих визуелних представа - користимо само кључне елементе.

↓
електронска орбита - спрегнути вектори орбитног и орбитног магнетног момента

електрон - спрегнути вектори $\vec{S}$ и $\vec{M}$

↓
Свеједно да ли $\vec{B}$ на $\vec{M}_S$ или $\vec{B}$ на $\vec{M}_L$



↓
Формална слика о структури атома

Векторски модел атома

↓
Радијуса величине које могу да се мере и међусобни односи преко векторске алгебре.

(попуњених орбита не може експ. да се одреди и нема ни физичког смисла...)

↓
Нарочито користан у атомској спектроскопији мноштво експерименталних података може да се разврста и објасни.

• Прикладбиност правилима и законима које нису очигледне ($\vec{M}_L$ и $\vec{S}$ у S-орбит са 0, али постоји дублетна структура линија)

↓
Уводи до нас правила која проистичу из квантне теорије и која пружају могућност квантитативног описа појава и тумачење резултата

↓
Квантоване момената и пројекција на изабрани правац не могу да се објасне сликом изведеном из макросвета, али та слика ипак нам даје интуитивни опис многих особина

- Елементи векторског модела: вектори угадног и магнетног момента

$$\vec{M}_e = \mu_e \vec{L} \quad \vec{M}_s = \mu_s \vec{S} \quad \mu_e = -\frac{e}{2m} \quad \mu_s = -\frac{e}{m} \quad g_s = 2 = \frac{\mu_s}{\mu_e}$$

Магнетни momenti могу да се изразе преко ~~експлицитних~~ угaоних
на се често не помињу изричито.

Орбитни угаони момент $\vec{L}$

$$\vec{L} = \sqrt{l(l+1)} \hbar \vec{e}_0$$

$\vec{e}_0$ јединични вектор чији смер се одређује
смером угaоног момента

l — орбитни квантни број

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

n — главни квантни број

$$|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)} \hbar$$

$$|\vec{L}|^2 = l(l+1) \hbar^2$$

Проекција орбитног угaоног момента на произвољно изабрану ос
(напомена: z) квантује се магнетним орбитним квантним бројем m :

$$L_z = m \hbar$$

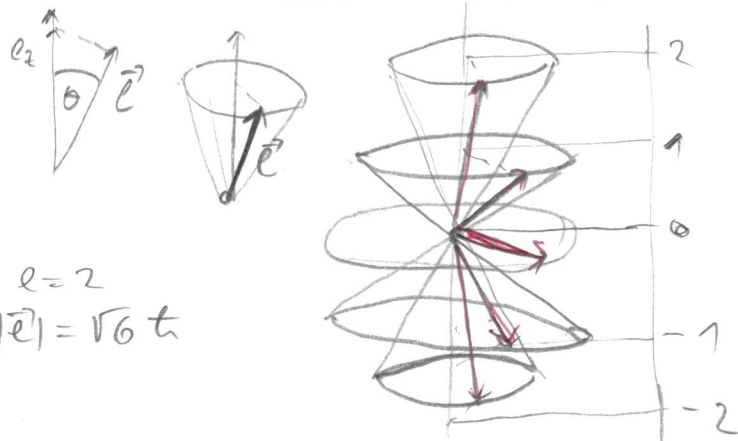
$$m = -l, -l+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, l-1, l$$

★ Важна особина која следи из ~~ова~~ релације неопређености:
Јколико се позната пројекција вектора на произвољно изабрану ~~прилику~~
тада не може бити позната његова пројекција на неки други правец.
(квантна природа)

↓ Геометризујемо ~~помишљамо~~ оквир векторског модела

$$\cos \theta = \frac{L_z}{|\vec{L}|} = \frac{m \hbar}{\sqrt{l(l+1)} \hbar}$$

← θ се састоји, ми углови са
држим правцима нису одређени



$\vec{L}$ се налази негде на ~~неким~~ површине
коне која се описује око изабраног
правца — вектор не прецесује све
док се не нађе магнетом или

• Без магнетног поља нема
прецесије — свега имају исту
енергију (дегенерисана ст) и
вектор $\vec{L}$ се може наћи са подједна-
ком вероватношћом на било којој кони.

Квантно стање са орбитним квантним бројем l може да се
оствари на $(2l+1)$ начин, тј. има $(2l+1)$ пројекција.

$L_z \leq |\vec{L}| \Rightarrow$ вектор не може да се буде паралелан са осом
на коју се пројектује $\Rightarrow$ не може бити паралелан
пољу (када постоји) на затвореном до прецесије.

(за $L_z = |\vec{L}|$ били би познате L_x и $L_y = 0$)

Список твояи момент $\vec{S}$

$$\vec{S} = \sqrt{s(s+1)} \hbar \hat{S}_0$$

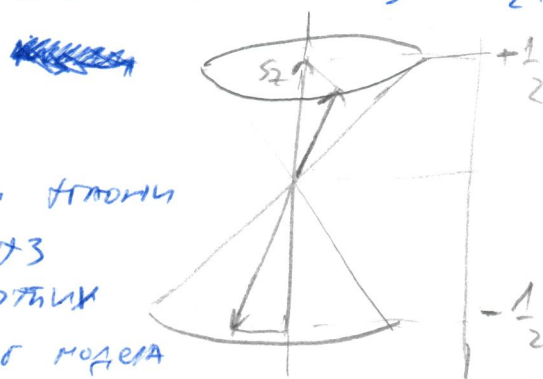
$$S = \frac{1}{2}$$

$$S_z = m_s \hbar \quad m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$$

$$|\vec{s}| = \sqrt{s(s+1)} \quad \hbar$$

$$|\vec{S}|^2 = s(s+1) \hbar^2$$

3x электрон



Аксиотна разматрања као за орбити титони
момент L за сваки титони момент J_3
разлике 3 величини и рачуна одговарајућих
квантних бројева. $\Rightarrow$ Радност векторског модела
оштрост

$$|\vec{S}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$

$$s = \frac{1}{2}$$

- ВРАТНО ПРОИЗВОДИНИ ПРАВЦА
ПОД ГЛОМ θ + ФАКУСУ НА ВЕКТОР $\vec{S}$
- ПРОЕКЦИЈА ЗЕ ФАРЕБНА СЛОБОДНИ
ЈЕДИНОГ ПРАВЦА (S_z)
- $\vec{S}$ СРМЪТ ОДРЕДЕНА СМ, $\vec{S}$ Е НА ПОВРШИНЕ
КТОМЕ КОЈА Е ОПИСАНА ОКО ИЗБИРАНОГ ПРАВЦА
- $m_s = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$ ПОСТОЈЕ ДВА МОЖЕТА СРМЪТ ИЛИ СЕ
ЕНЕРГИЈЕ, $\vec{S}$ ОДСТВАТ МАГНЕТОМ ПОЛЕ, ЈЕДИНАКЕ
- $\vec{S}$ СЕ МАМЕ ИЛИ НА ПОВРШИНЕ ВИО КОЈЕ КТОМЕ И НЕ ПРЕЦЕСИТЕ.

- Орбитни магнетни момент, $\vec{\mu}_e$

$$\vec{\mu}_e = -\mu_B \frac{\vec{e}}{\hbar} \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$$

$$\vec{\mu}_e = -g_e \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad g_e = 1 \quad (\text{слизность сА спинским и яолным моментом})$$

~~$\vec{P}_e$~~ $\vec{P}_e = -g \mu_B \sqrt{e(e+1)} \vec{e}^0$ " " против смер од $\vec{e}$

$$|\vec{\mu}_e| = +\mu_B \sqrt{l(l+1)}$$

$$\mu_{e,2} = -m_e \mu_B$$

Обстоятелство няма и миса да бъде квантована във едно енергийно ниво и фреквенцията прецесира.

Ван поба $\vec{M}_e$ и $\vec{J}$ се разликују само за скаларни констант.
Спинска разлика се дава тек при појави поба - магнетно поље делује на орбитни и спини момент само преко њиховог магнетног момента. (и тада остаје иста веза.)

Спински магнетни момент μ_s

$$M_S = -g_S \mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar}$$

$$\mu_S = -g_S \mu_B \sqrt{S(S+1)} \hbar \vec{S}^0$$

$$|\vec{\mu}_S| = \frac{1}{2} g_S \mu_B \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

$$M_{S,2} = -g_S m_S M_B$$

МЕХАНИЗМ СПРЕЗЊА МОМЕНТА

УГЛОВИ МОМЕНТИ

- интеракција са околином састоји се од слабог гравитационог поља које потиче од масе која се придружена моменту
- нема механизма за непарану интеракцију са околином и другим моментима

МАГНЕТНИ МОМЕНТИ

- око сваког магнетног дипола постоји магнетно поље које може да делује на друге магнетне моменте.
- делство се преноси и на угловне моменте
- формула слика спин-орбитне интеракције следи

Међуделство СММ $\vec{\mu}_e$ и локалног магнетног поља $\vec{B}_e$ (које потиче од орбитног кретања електрона) исте је врсте као и међуделство са спољњим магнетним пољем:

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \mu_s \vec{S} \times \vec{B}_e$$

и обрнуто ОММ $\vec{\mu}_e$ са $\vec{B}_s$:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \mu_e \vec{e} \times \vec{B}_s$$

Јединичне
кретачице

$\vec{B}_e$ и $\vec{B}_s$ нису статичка поља па нема односне интеграције.

$$\vec{B}_e = k_e(x_s, y_s, z_s) \vec{\mu}_e$$

→ зависи од величине момента од којег потиче, локалне геометрије (пољна линије и координате $\vec{\mu}_e$).

$$\vec{B}_e = k_e(x_s, y_s, z_s) \mu_e \vec{e}$$

$$\vec{B}_s = k_s(x_e, y_e, z_e) \vec{\mu}_s$$

$$\vec{B}_s = k_s(x_e, y_e, z_e) \mu_s \vec{S}$$

$$-\vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_e = -\vec{\mu}_e \cdot \vec{B}_s \rightarrow \text{енергије међуделовања су исте.}$$

$$k_e(x_s, y_s, z_s) = k_s(x_e, y_e, z_e) = K$$

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \mu_s \mu_e K \vec{S} \times \vec{e}$$

$$+ \frac{d\vec{e}}{dt} = \mu_s \mu_e K \vec{e} \times \vec{S}$$

углови орбитни и углови спински момент су међусобно спрегнути.

спрежање 2 магнетне природе - зависи од хипермагнетних односа.

$$\frac{d\vec{S}}{dt} + \frac{d\vec{e}}{dt} = \mu_s \mu_e K (\vec{S} \times \vec{e} + \vec{e} \times \vec{S})$$

$$\frac{d(\vec{L} + \vec{S})}{dt} = \mu_B \mu_e K (\vec{L} \times \vec{e} - \vec{S} \times \vec{e}) = 0$$

$$\vec{L} + \vec{S} = \text{const}$$

Иако су вектори $\vec{L}$ и $\vec{S}$ + кретањем, њихов збир остаје сглан.

Када су вектори орбиталног и спинског момента спрегнути њихов збир је константа кретања. Укупни углови момент:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$\vec{L}$ и $\vec{S}$ се кретају + слагачено и њихов збир остаје сглан, па се дозвољава да се размотри кретање само једне компоненте.

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{S}}{dt} &= \mu_B \mu_e K (\vec{S} \times \vec{e} + \vec{S} \times \vec{S}) = \mu_B \mu_e K (\vec{S} \times (\vec{L} + \vec{S})) = \\ &= \mu_B \mu_e K \vec{S} \times \vec{J} \end{aligned}$$

$\vec{J}$ се не мења током времена па можемо интерпретирати.

Али и из облика дефиниције закључујемо да $\vec{S}$ прецесује око $\vec{J}$. Следи и да друга компонента $\vec{L}$ такође прецесује.

Спин-орбитално међудејство (које је магнетно по природи) доводи до тога да $\vec{L}$ и $\vec{S}$ прецесују око свог векторског збира $\vec{J}$ - који је константа кретања спрегнутих вектора.

Укупни углови момент

- константа кретања спрегнутих вектора $\vec{L}$ и $\vec{S}$
- квантује се одговарајућим квантним бројем:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$J = \sqrt{j(j+1)} \hbar \quad j^0$$

$$|J| = \sqrt{j(j+1)} \hbar$$

Правило из квантне механике разматрања унутрашњих кванти броја

$$J = l + s, l + s - 1, \dots, |l - s| + 1, |l - s|$$

34 једноелектронски систем $s = \frac{1}{2}$

$$J = l \pm \frac{1}{2} \quad l > 0$$

$$J = \frac{1}{2} \quad l = 0$$

- просторно квантовање

$$J_z = m_j \hbar$$

$$m_j = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

↑ магнетни квантни број
вертикалног угловог момента.

Вектор $\vec{J}$ се налази на квантној висини $\sqrt{j(j+1)} \hbar$ а висина $m_j \hbar$.

• Све релативне произведе из квантно механичке слике, али векторски модел олакшава њихово приказивање; као и узводне односе измеђ њих

• Слутање се много сложеније него што изгледа на први поглед, беза измеђ вектора $\vec{L}$, $\vec{S}$ и $\vec{J}$ се мишља, као и беза измеђ њихових квантних бројева, али ис и измеђ интеритета:

$$\sqrt{l(l+1)} + \sqrt{s(s+1)} \neq \sqrt{j(j+1)}$$

$\vec{L}$, $\vec{S}$ и $\vec{J}$ спајају се само под одређеним условима и не могу бити паралелни:

$$\vec{J} \cdot \vec{J} = (\vec{L} + \vec{S}) \cdot (\vec{L} + \vec{S}) = \vec{L} \cdot \vec{L} + \vec{S} \cdot \vec{S} + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

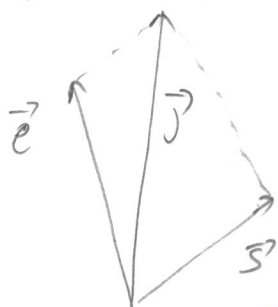
$$|\vec{J}|^2 = |\vec{L}|^2 + |\vec{S}|^2 + 2|\vec{L}||\vec{S}|\cos(\vec{L} \cdot \vec{S})$$

$$\begin{aligned} \cos(\vec{L} \cdot \vec{S}) &= \frac{|\vec{J}|^2 - |\vec{L}|^2 - |\vec{S}|^2}{2|\vec{L}||\vec{S}|} \\ &= \frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2\sqrt{l(l+1)}\sqrt{s(s+1)}} \end{aligned}$$

$$j = \frac{3}{2} \\ |\vec{J}| = \frac{\sqrt{15}}{2} \hbar$$

$$l = 1 \quad s = \frac{1}{2} \\ |\vec{L}| = \sqrt{2} \hbar \quad |\vec{S}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$

$$j = \frac{1}{2} \\ |\vec{J}| = \frac{\sqrt{3}}{2} \hbar$$



Прецесија $\vec{L}$ и $\vec{S}$ се користи за описивање квантованог $\vec{J}$ и успостављање односа измеђ m_l , m_s и m_j .

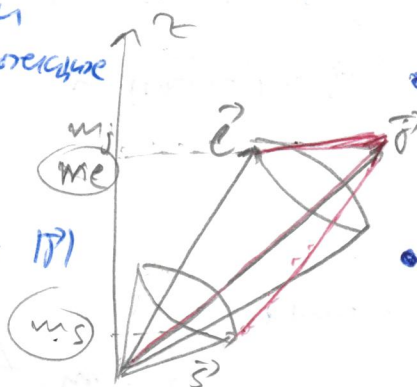
• $\vec{J}$ се понаша као слободни вектор $\vec{L}$ и $\vec{S}$ + померах квантованог пројекције

$$\cos\theta = \frac{j_z}{|\vec{J}|} = \frac{m_j}{\sqrt{j(j+1)}}$$

m_j = конт. за стани интензитет $|\vec{J}|$

• Али ова прецесија ($\vec{J}$) за $\vec{L}$ и $\vec{S}$ се не поклапа са

оста пројектовања (производно изводни 2-оста) - па пројекције $\vec{L}$ и $\vec{S}$ на z нису сличне.



• $\vec{L}$ и $\vec{S}$ прецесирају око $\vec{J}$ и без спољашњег поља

• $\vec{J}$ не прецесира.

. Проекције $\vec{L}$ и $\vec{S}$ на избраната ос, када се спрегнати, нису одређени $\Rightarrow$ квантни броеви m_l и m_s не могу бити једновремено одређени када и квантни број m_j .



За систем спрегнутих вектора квантни броеви m_l и m_s нису добри квантни броеви. (помоћу њих не може да се описује изабрана особина система)

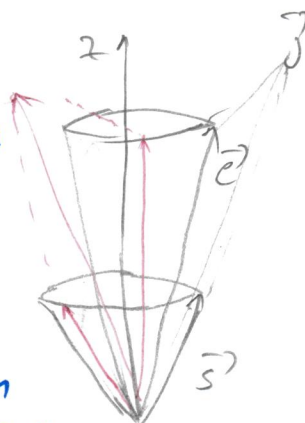


Квантни броеви l и s су и пата добри јер се помоћу њих изражава величина угаоних момената $\vec{L}$ и $\vec{S}$.



Систем спрегнутих ~~и~~ угаоних момената (спинског и орбиталног) описује се квантним бројевима l, s, j и m_j .

- Када орбитални и спински угаони моменти нису спрегнути, веома мали ($l \rightarrow 0$ и са великим n) конст. спрегња или деловима спаљивањем се изазове распрежање.



$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \neq \text{скалар}$$

$\rightarrow$ укупни угаони момент није скалар није константна величина

$\hookrightarrow$ не може да се одреди јер $\vec{L}$ и $\vec{S}$ нису $\neq$ величине па се вредност j мења

Распрежати моменти се понашају као изоловани моменти (сваки има свој Лагранжев прецес и сопствени вектор)

Имају одређене пројекције у произвољном правцу, па су m_l и m_s добри квантни броеви.

↓ Срење системе распрежаних угаоних момената одређује се квантним бројевима l, m_l, s, m_s

Резиме, за систем који чине два углана момента $\vec{J}_1$ и $\vec{J}_2$ (са квантним бројевима j_1 и j_2):

- укупни углани момент $|\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)} \hbar$
 $J = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2| + 1, |j_1 - j_2|$
- $\vec{J}$ лежи негде на кугли описаној око произвољног правца + однос на који се одређује његова пројекција
- сваки појединачно има одређен интензитет
 $|\vec{J}_1| = \sqrt{j_1(j_1+1)} \hbar$ и $|\vec{J}_2| = \sqrt{j_2(j_2+1)} \hbar$
- пројекција $\vec{J}$ на z-оси износи $m_j \hbar$:
 код спрегнутих m_{j_1} и m_{j_2} су неодређени Ми зелихов
 збир одређен и јединак m_j .
- код неспрегнутих вектора, квантни број j је неодређен
 али m_{j_1} и m_{j_2} имају дискретне ситне вредности.
- у сваком случају систем који се састоји од два углана момента одређен је са 4 квантна броја: j_1, j_2, j и m_j или
 j_1, j_2, m_{j_1} и m_{j_2}
 Различита представља различити начини посматрања - формално се сведуће. = али опис се може допоставити када одговара физичкој слици система.

- Укупни магнетни момент

$$\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S$$

$$\vec{\mu}_J = -\frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{L} + 2\vec{S})$$

$$\bullet g_S = 2$$

$$\boxed{\vec{\mu}_J = -\frac{\mu_B}{\hbar} (\vec{J} + \vec{S})}$$

$$\bullet \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

↳ не лежи на истом правцу као углани момент $\vec{J}$
 ($\vec{J}$ и $\vec{S}$ не могу да леже на истом правцу)

↳ као и $\vec{L}$ и $\vec{S}$ и $\vec{\mu}_J$ ће прецесовати око укупног угланог момента $\vec{J}$.

Због ступе промене ПРАВЦА интензитета $\vec{M}_j$ се не може експериментално мерити, али вредност $\vec{M}_j$ усредњена по времену једнака је његовој проекцији на правцу прецесованог ($\vec{j}$)

↓
сгвађени магнетни момент:

$$(\vec{M}_j)_j = -|\vec{M}_j| \cos(\vec{M}_j, \vec{j}) / \vec{j}$$

$$(\vec{M}_j)_j = -\frac{\mu_B}{\hbar} [|\vec{j}| \cos(\vec{j}, \vec{j}) + |\vec{s}| \cos(\vec{s}, \vec{j})] \cdot \vec{j}$$

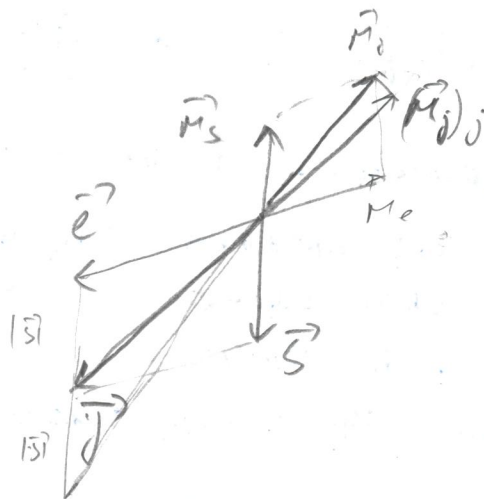
КАО и раније веза између угловних и магнетних момената

$$(\vec{M}_j)_j = -g_j \mu_B \frac{\vec{j}}{\hbar}$$

Ландеов g фактор атома:

$$g_0 = 1 + \frac{|\vec{s}|}{|\vec{j}|} \cos(\vec{s}, \vec{j})$$

↑
односно магнететни особина атома према магнететним особинама орбиталног електрона



$$\vec{s} \cdot \vec{j} = |\vec{s}| |\vec{j}| \cos(\vec{s}, \vec{j})$$

$$g_0 = 1 + \frac{\vec{s} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|^2}$$

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$$

$$\vec{l} = \vec{j} - \vec{s}$$

$$|\vec{l}|^2 = (\vec{j} - \vec{s})^2$$

$$|\vec{l}|^2 = |\vec{j}|^2 + |\vec{s}|^2 - 2\vec{s} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{s} \cdot \vec{j} = \frac{|\vec{j}|^2 - |\vec{l}|^2 + |\vec{s}|^2}{2}$$

$$g_0 = 1 + \frac{|\vec{j}|^2 - |\vec{l}|^2 + |\vec{s}|^2}{2|\vec{j}|^2}$$

$$g_0 = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

између 1 $g_j = g_l$

и 2 $g_0 = g_s$

↳ преко g_0 се израчунава магнетне особине атома

- Спин-орбитальная интеракция

$$U_{ls} = a \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{r^2}$$

$$a = E_0 \alpha^2 \frac{Z^4}{n^6}$$

↑
БОРОВА ТЕОРИЯ

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2 \hbar^2}{2m^2 r^3 c^2} = a$$

ТАКАЖЕ ИЗРАЗ

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{n^3} \frac{Z^3}{n^3 e (e + \frac{1}{2}) (e + 1)}$$

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{n^3} \frac{Z}{n^6}$$

$$a = E_0 \alpha^2 \frac{Z^4}{n^3 e (e + \frac{1}{2}) (e + 1)}$$

$$j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c \hbar} \sim \frac{1}{137}$$

↓
КОНСТАНТА ФИНЕ СТРУКТУРЕ

$$j = \vec{L} + \vec{S}$$

$$|\vec{j}|^2 = (\vec{L} + \vec{S})^2 \quad |\vec{j}|^2 = |\vec{L}|^2 + |\vec{S}|^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

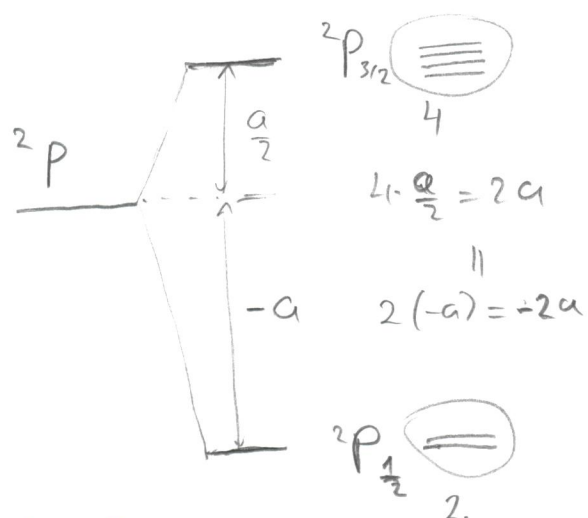
$$\vec{L} \cdot \vec{S} = \frac{|\vec{j}|^2 - |\vec{L}|^2 - |\vec{S}|^2}{2}$$

$$\frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{\hbar^2} = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

$$U_{ls} = \frac{1}{2} a [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)]$$

пример:

$$^2P \begin{matrix} \nearrow 2s+1 \\ \searrow e \end{matrix}$$



$$e = 1 \quad s = \frac{1}{2}$$

$$j_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad j_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$U_{j_1} = \frac{1}{2} a \left[\frac{3}{2} \left(\frac{3}{2} + 1 \right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = \frac{1}{2} a$$

$$U_{j_2} = \frac{1}{2} a \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - 1(1+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] = -a$$

Энергия не зависит от m_j + отсутствие спинового магнетизма - дегенерация $^2P_{3/2}$ 4 и $^2P_{1/2}$ 2.

$\vec{L}$ и $\vec{S}$ "параллельны" ($\cos \theta > 0, \theta < \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \vec{L}_S$ и $\vec{B}_e$ "антипараллельны" $U > 0$
 $\vec{L}$ и $\vec{S}$ "антипараллельны" ($\theta > \frac{\pi}{2}$) $\Rightarrow \vec{L}_S$ и $\vec{B}_e$ "параллельны" $U < 0$

- Мебудаство спинског магнетног поља и локалног магнетног поља орбитног кретања изражено као мебудаство главних момената чепа сваки енергетски ниво на два (за $S = \frac{1}{2}$) $\Rightarrow$ дублетна структура нивоа

- S ($l=0$) термови се не цепају, нема B_e

- веће j већа енергија

- $a \sim Z^4$