



Matematičke metode u fizičkoj hemiji

1. termin vežbi

doc. dr Ana Dobrota

✉ ana.dobrota@ffh.bg.ac.rs

📍 Lab. 358

Izračunavanje parametara distribucije rezultata

- „Ručno“ računanje i softverska obrada podataka

Stat. populacija (N>30)	Stat. uzorak (N<30)
$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$	
$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2}$

- Softverski paketi: ugrađene funkcije
- MS Excel

AVERAGE – srednja vrednost seta podataka

STDEV.P – st. devijacija populacije (faktor N) *u starijim verzijama **STDEVP**

STDEV.S – st. devijacija uzorka (eng. *sample*, faktor N-1) *u starijim verzijama **STDEV**

Npr. =AVERAGE(A4:A19) – srednja vrednost brojeva u poljima od A4 do A19

Histogram

Set od 100 merenja veličine x

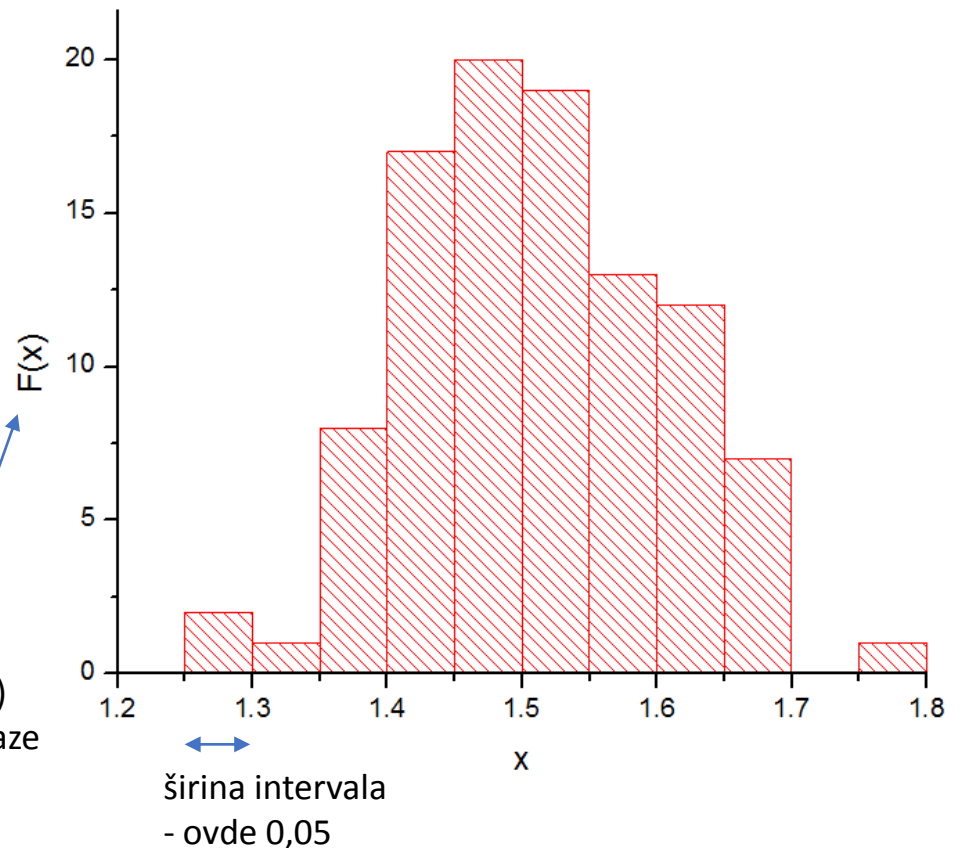
1.50	1.45	1.47	1.55	1.76
1.57	1.56	1.43	1.38	1.47
1.64	1.46	1.53	1.45	1.44
1.48	1.56	1.51	1.59	1.52
1.42	1.43	1.53	1.53	1.45
1.47	1.37	1.62	1.62	1.58
1.36	1.60	1.39	1.53	1.49
1.46	1.33	1.60	1.36	1.42
1.50	1.63	1.41	1.58	1.40
1.51	1.48	1.46	1.66	1.62
1.49	1.35	1.44	1.56	1.49
1.69	1.54	1.62	1.25	1.67
1.54	1.41	1.54	1.63	1.44
1.51	1.47	1.64	1.44	1.64
1.38	1.54	1.46	1.41	1.51
1.64	1.66	1.41	1.53	1.49
1.43	1.25	1.58	1.54	1.59
1.69	1.46	1.65	1.45	1.37
1.59	1.43	1.55	1.45	1.67
1.43	1.57	1.51	1.40	1.51

Nenormirana učestanost (frekvencija)
- koliko puta se vrednosti x koje se nalaze
u datom intervalu javljaju kao rezultat
merenja

OriginPro

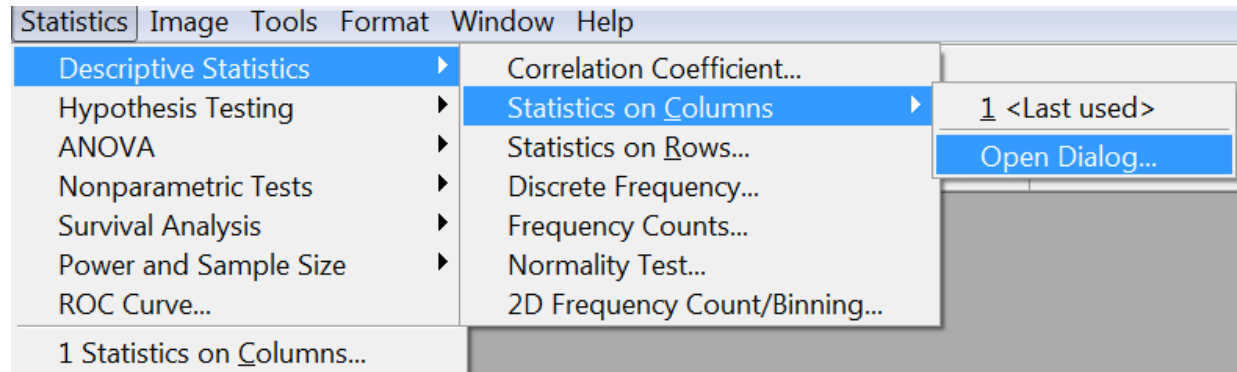
Plot / Statistics / Histogram

*Podaci treba da budu u koloni koja se vodi kao Y



Izračunavanje parametara distribucije rezultata

- „Ručno“ računanje i softverska obrada podataka
- Softverski paketi: ugrađene funkcije
- OriginPro / *Statistics / Descriptive Statistics / Statistics on Columns*



Rezultat

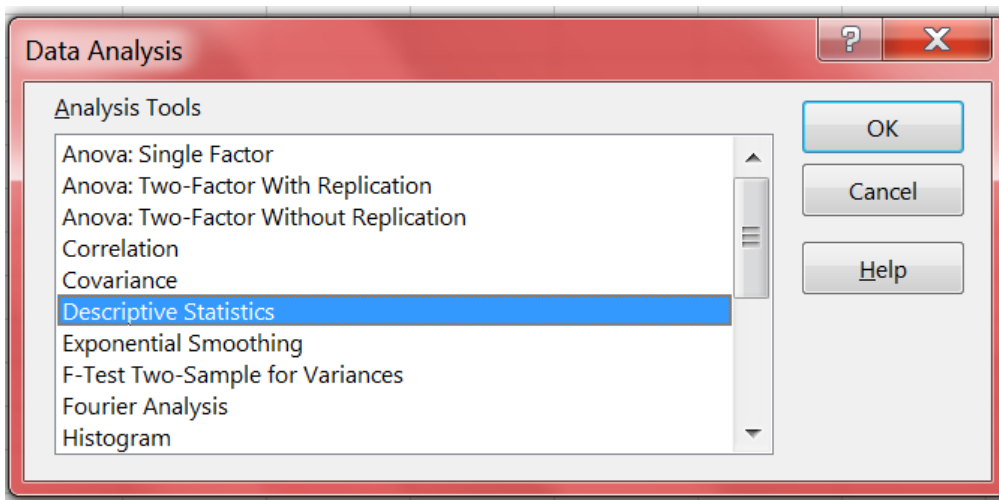
Statistics on Columns (9.10.2020 11:36:15)

+	<i>Notes</i>									
+	<i>Input Data</i>									
-	<i>Descriptive Statistics</i>									
	N total	Mean	Standard Deviation	SE of mean	Sum	Mode	Minimum	Median	Maximum	
A	100	1.5064	0.09844	0.00984	150.64	1.51	1.25	1.505	1.76	

Izračunavanje parametara distribucije rezultata

Excel

Data / Data Analysis / Descriptive Statistics / Summary Statistics



ukoliko ne postoji dugme Data Analysis, otići na File / Options / Add-ins i dodati **Analysis ToolPak*

Output →

Column1	
Mean	1.5064
Standard Error	0.00984375
Median	1.505
Mode	1.51
Standard Deviation	0.09843749
Sample Variance	0.00968994
Kurtosis	-0.143379
Skewness	0.00541532
Range	0.51
Minimum	1.25
Maximum	1.76
Sum	150.64
Count	100

Izračunavanje parametara distribucije rezultata

Excel

Data / Data Analysis / Descriptive Statistics / Summary Statistics

Medijana (eng. Median): vrednost koja se nalazi u sredini seta merenja kada rezultate poređamo od najmanjeg ka najvećem. U slučaju parnog broja merenja, jednaka je srednjoj vrednosti dva centralna rezultata u tako poređanom setu.

Mod (eng. Mode): vrednost sa najvećom frekvencijom (učestanošću), odnosno najčešći rezultat merenja

<i>Column1</i>	
Mean	1.5064
Standard Error	0.00984375
Median	1.505
Mode	1.51
Standard Deviation	0.09843749
Sample Variance	0.00968994
Kurtosis	-0.143379
Skewness	0.00541532
Range	0.51
Minimum	1.25
Maximum	1.76
Sum	150.64
Count	100

Output →

Gausova raspodela. Primer 1

Imamo pakovanje otpornika od 100Ω , pri čemu je na deklaraciji navedena standardna devijacija od 2Ω .

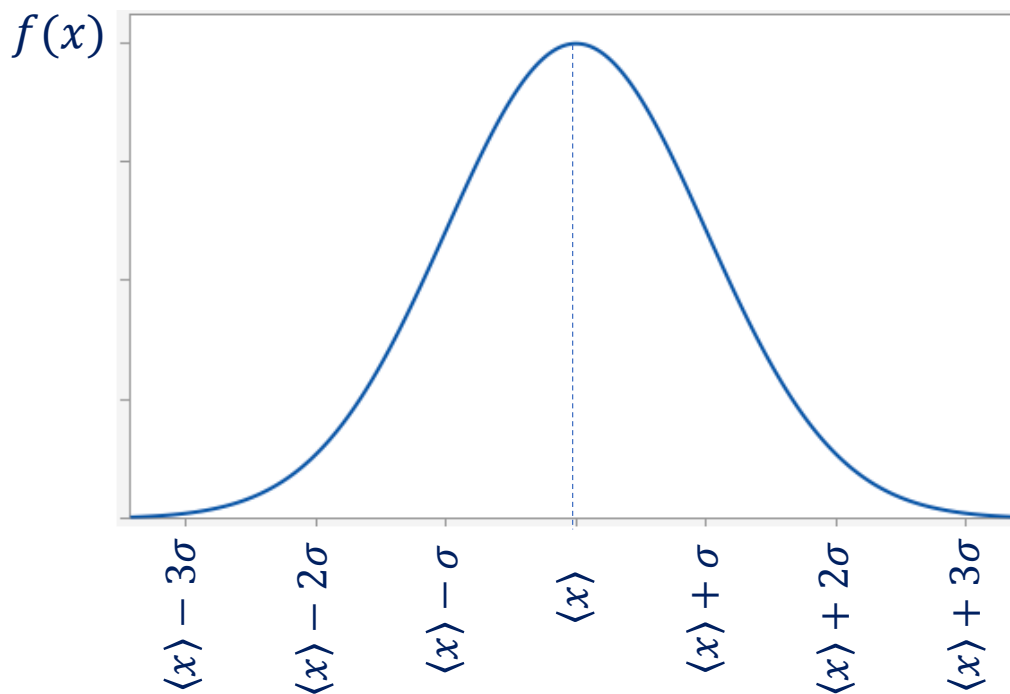
- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor 95Ω ili manji.
- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor između 99 i 101Ω .

$$\langle x \rangle = 100 \Omega$$

$$\sigma = 2 \Omega$$

$$P_{(-\infty, 95\Omega]} = ?$$

$$P_{[99\Omega, 101\Omega]} = ?$$



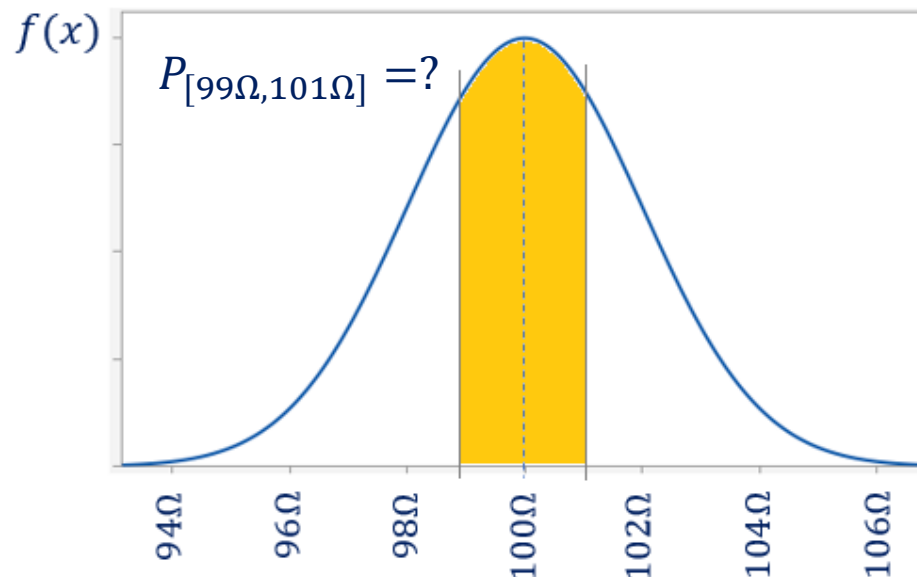
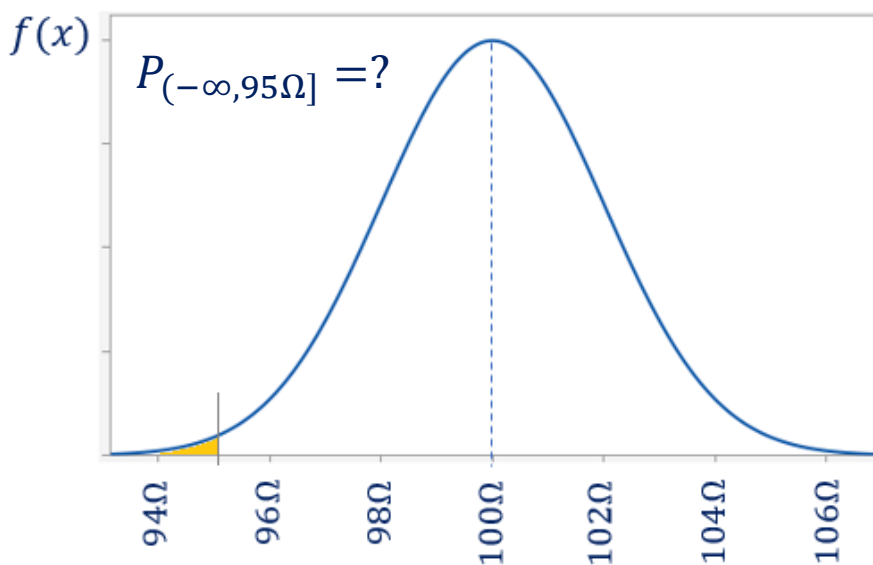
Gausova raspodela. Primer 1

Imamo pakovanje otpornika od 100Ω , pri čemu je na deklaraciji navedena standardna devijacija od 2Ω .

- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor 95Ω ili manji.
- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor između 99 i 101Ω .

$$P_{(-\infty, X]} = \int_{-\infty}^X f(x) dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{X - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right) \right]$$

$$P_{[a, b]} = \int_a^b f(x) dx$$

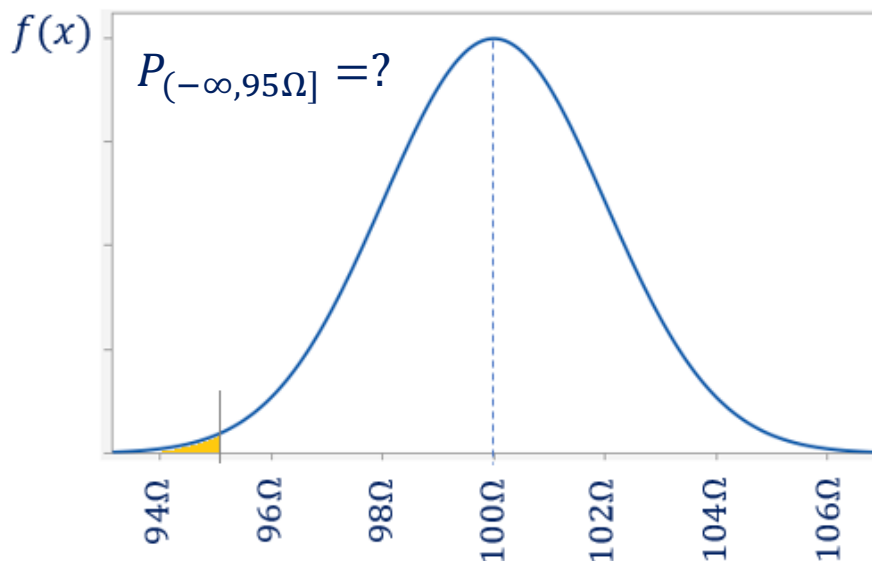


Gausova raspodela. Primer 1

Imamo pakovanje otpornika od 100Ω , pri čemu je na deklaraciji navedena standardna devijacija od 2Ω .

- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor 95Ω ili manji.
- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor između 99 i 101Ω .

$$P_{(-\infty, X]} = \int_{-\infty}^X f(x) dx = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{X - \mu}{\sigma \sqrt{2}} \right) \right]$$



MS EXCEL

NORM.DIST(x, mean, st_dev, 1)

(2007 i starije: NORMDIST (bez tačke))

=NORM.DIST(95, 100, 2, 1)
=0,62%

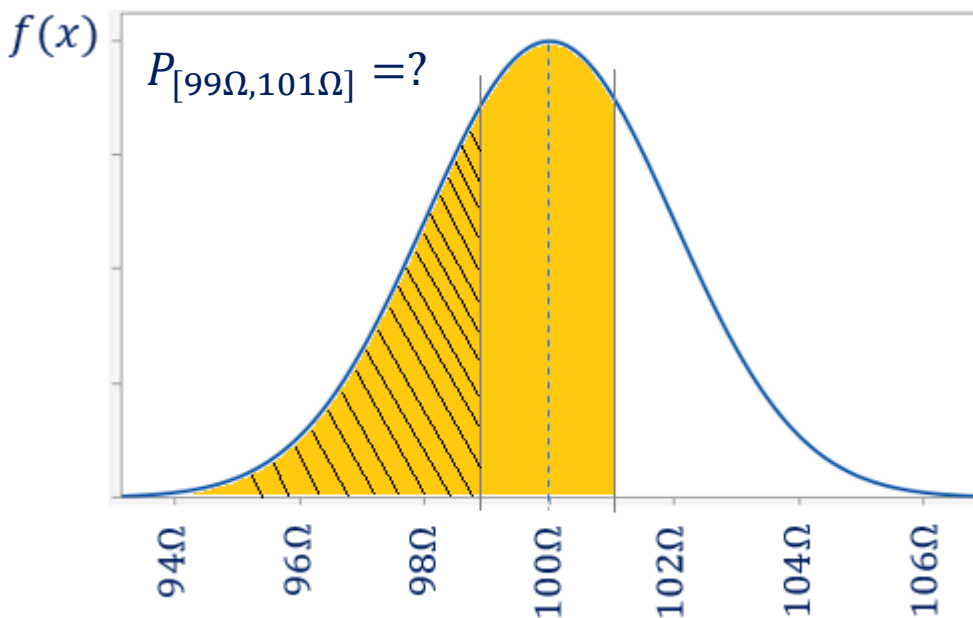
Gausova raspodela. Primer 1

Imamo pakovanje otpornika od 100Ω , pri čemu je na deklaraciji navedena standardna devijacija od 2Ω .

- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor 95Ω ili manji.
- Odrediti verovatnoću da ćemo pronaći otpornik čiji je otpor između 99 i 101Ω .

$$P_{[a,b]} = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$= \text{NORM.DIST}(101, 100, 2, 1) - \text{NORM.DIST}(99, 100, 2, 1)$$



$$= 38,29\%$$

Gausova raspodela. Primer 2

Poznato je da masa aspirina u tabletama jednog proizvođača prati normalnu raspodelu sa $\mu = 250$ mg i $\sigma^2 = 25$ mg². Koji procenat tableta sadrži između 243 i 262 mg aspirina?

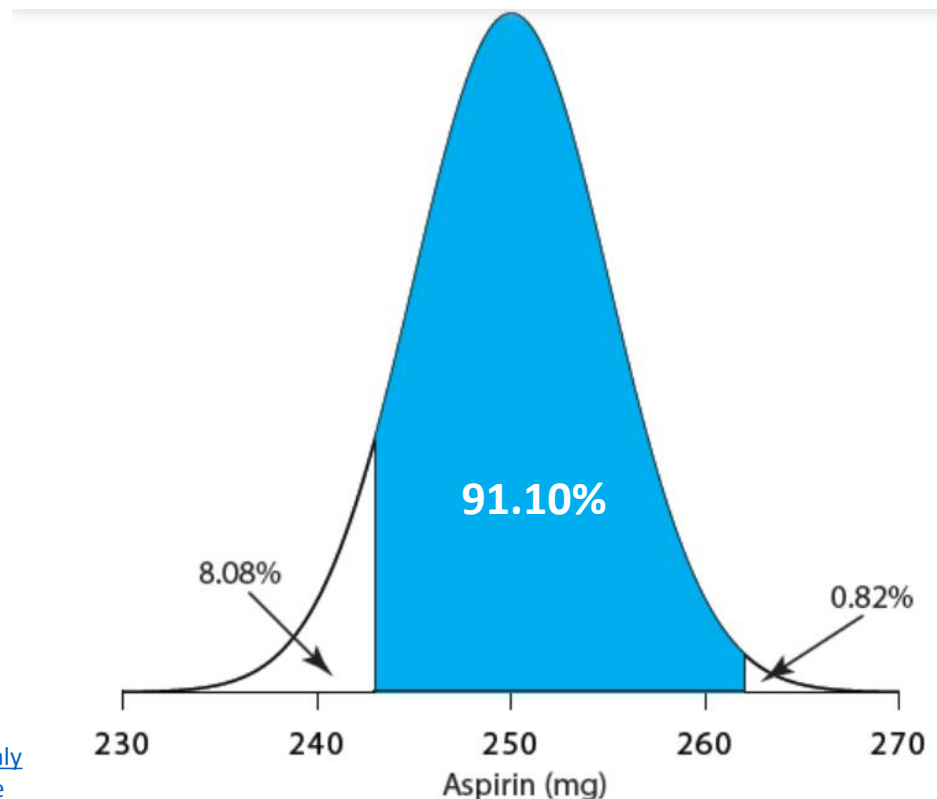
$$\mu = 250 \text{ mg}$$

$$\sigma^2 = 25 \text{ mg}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 5 \text{ mg}$$

$$P = \text{NORM.DIST}(262, 250, 5, 1) \\ - \text{NORM.DIST}(243, 250, 5, 1)$$

$$= 91,10\%$$



Gausova raspodela. Primer 2

Poznato je da masa aspirina u tabletama jednog proizvođača prati normalnu raspodelu sa $\mu = 250$ mg i $\sigma^2 = 25$ mg². Koji procenat tableta sadrži između 243 i 262 mg aspirina?

$$\mu = 250 \text{ mg}$$

$$x_1 = 243 \text{ mg}$$

$$\sigma^2 = 25 \text{ mg}^2$$

$$x_2 = 262 \text{ mg}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = 5 \text{ mg}$$

$$z_1 = \frac{|x_1 - \mu|}{\sigma} = \frac{|243 - 250| \text{ mg}}{5 \text{ mg}} = 1,4$$

$$z_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma} = \frac{(262 - 250) \text{ mg}}{5 \text{ mg}} = 2,4$$

$$P = \text{GAUSS}(1.4) + \text{GAUSS}(2.4) \\ = 91,10\%$$

