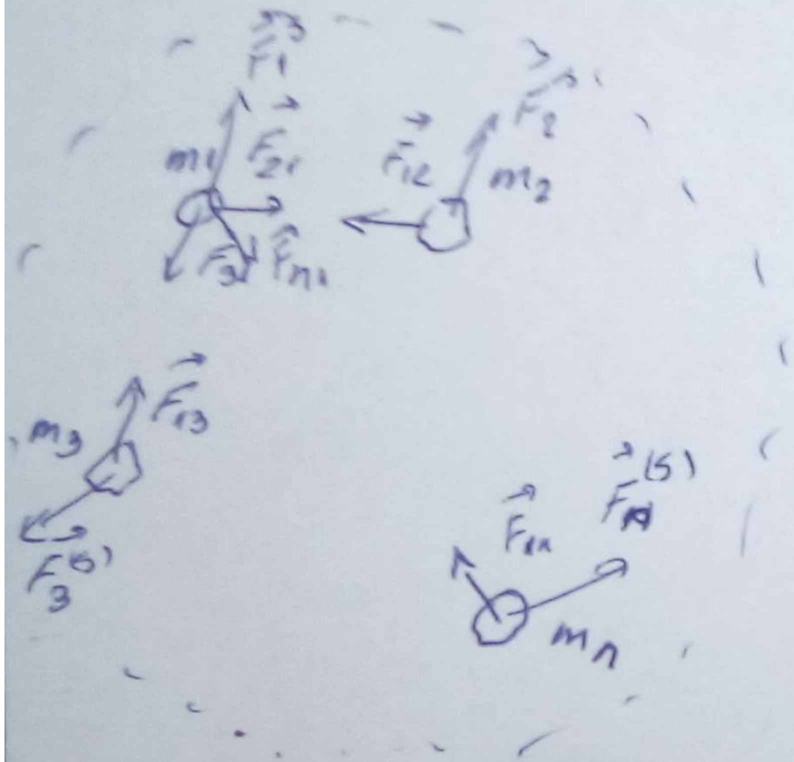
Физика 1
предавање (24.4.2020.)

Горан Попарић

Кретање механичког система
Центар масе

Механички систем од n тела:

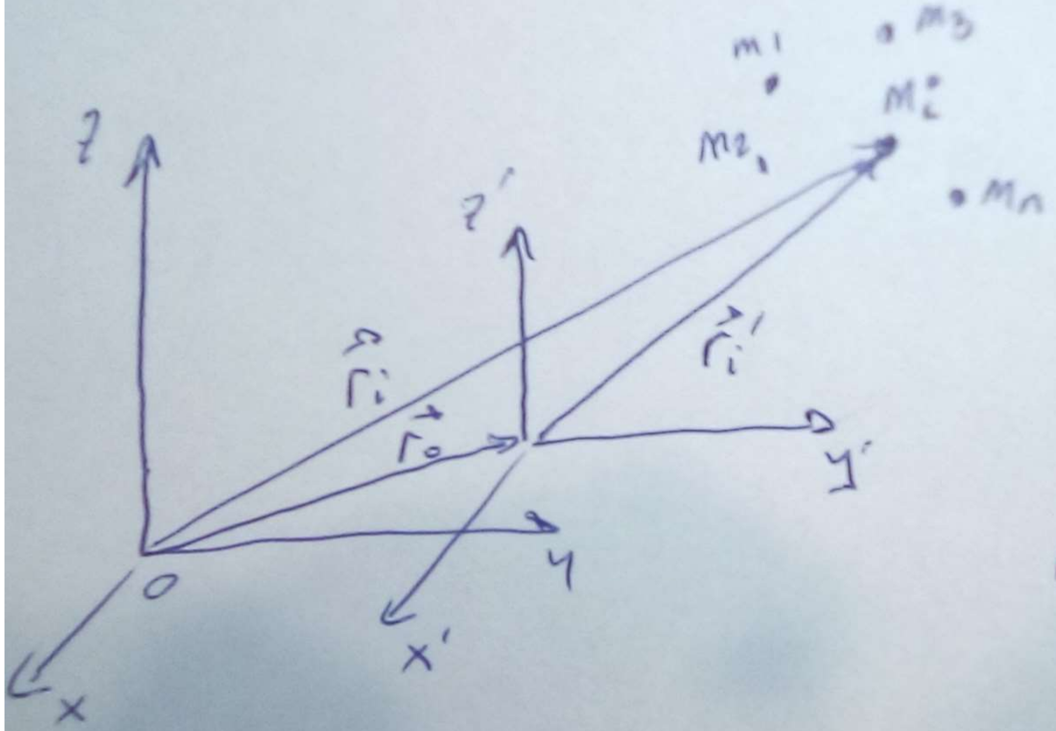


$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{(s)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\vec{r}_{cm} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

Центар масе

- Положај центра масе не зависи од избора координатног референтног система:



$$\vec{r}_i = \vec{r}_0 + \vec{r}_i'$$

$$\vec{r}_{cm}' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_0)$$

$$\vec{r}_{cm}' = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i - \frac{1}{m}\Big(\sum_{i=1}^{n} m_i\Big)\vec{r}_0$$

$$\vec{r}_{cm}' = \vec{r}_{cm} - \vec{r}_0$$

Закон кретања центра масе

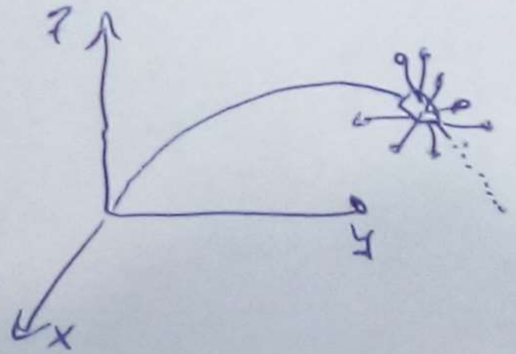
$$m\vec{a}_{cm} = M\cdot\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}$$

$$\boxed{m\vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}}$$

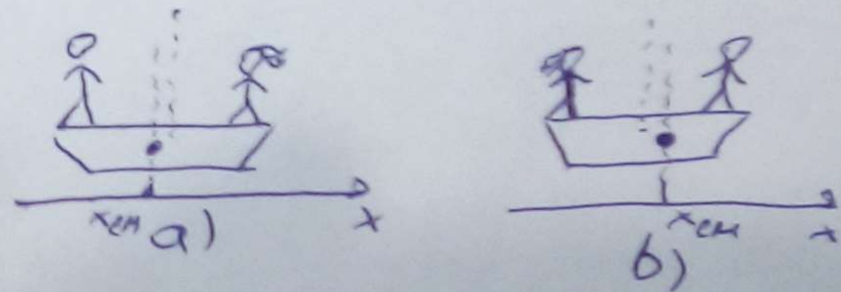
Ако је $\vec{F} = 0$, (тј. систем је изолован или је сума свих сила које делује на систем $= 0$.)

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_{cm}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{cm} = const.$$

Пример 1. Кретање гранате која експлодира:



Пример 2. Померање чамца на језеру:



Транслаторно кретање крутог тела

Систем од n честица, али на фиксним међусобним растојањима:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ (k\neq i)}}^{n} \vec{F}_{ki} + \vec{F}_i^{(s)} \qquad (i=1,2,\dots,n)$$

Након сумирања по свим честицама крутог тела:

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \underbrace{\sum_i \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ki}}_{=0} + \underbrace{\sum \vec{F}_i^{(s)}}_{\vec{F}}$$

добијамо:

$$\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}$$

за транслаторно кретање је: $\underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{m}\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right) = \vec{F}$

m укупна маса крутог тела

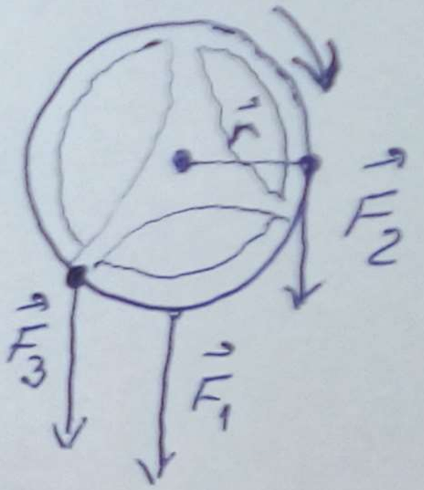
убрзање било које тачке крутог тела

Ротационо кретање крутог тела

Момент импулса. Момент силе

За сваку тачку крутог тела можемо писати:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_{ki} + \vec{F}_i \quad (i=1,\dots,n)$$

Помножимо ову једначину са десне стране са $\vec{r}_i \times$:

$$\vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \sum_k \vec{F}_{ki} + \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(s)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\underbrace{(\vec{r}_i \times \vec{p}_i)}_{\vec{L}_i} = \vec{r}_i \times \sum_k \vec{F}_{ki} + \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(s)}}_{\vec{M}_i} \quad \Big/ \sum_i$$

$$\Rightarrow \frac{d\overbrace{(\vec r_i \times \vec p_i)}^{}}{dt} = \vec r_i \times \sum_k \vec F_{ki} + \underbrace{\vec r_i \times \vec F_i^{(s)}}_{\vec M_i} \quad \Big/ \sum_i$$

$$\underbrace{(\vec r_i \times \vec p_i)}_{\vec L_i}$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \vec L_i}_{\frac{d}{dt}\vec L} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec r_i \times \sum_{k=1}^{n} \vec F_{ki}}_{=0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \vec M_i}_{\vec M_t}$$

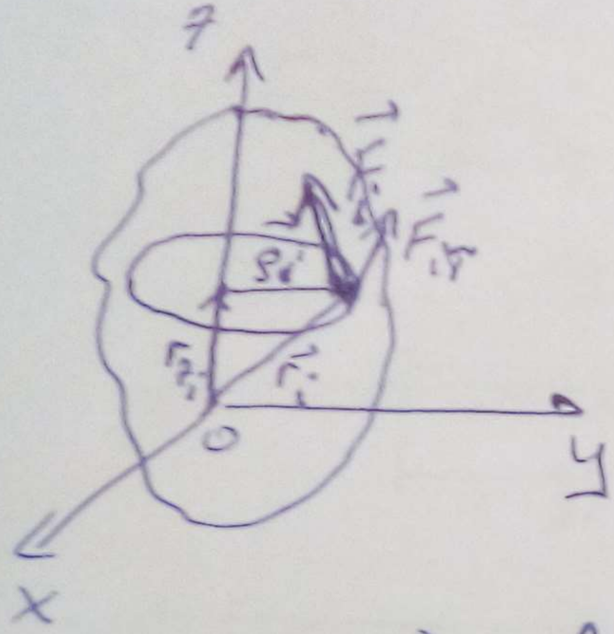
Систем честица круто тело:

$$\boxed{\frac{d\vec L}{dt} = \vec M} \qquad \boxed{\frac{d\vec p}{dt} = \vec F}$$

Закон одржања момента импулса:

$$\boxed{\vec M = 0 \Rightarrow \frac{d\vec L}{dt} = 0 \Rightarrow \vec L = \overrightarrow{const}.}$$

Момент інерції



$$\vec F_{i\tau} = m_i \vec a_{i\tau} = m_i(\vec \alpha \times \vec r_i)$$

$$\vec M_i = \vec r_i \times \vec F_{i\tau} = \vec r_i \times m_i(\vec \alpha \times \vec r_i)$$

$$\vec M_i = m_i \rho_i^2 \cdot \vec \alpha \qquad \Big/ \sum_i$$

$$\vec M = \sum_{i=1}^{n} \vec M_i = \vec \alpha \cdot \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2}_{I}$$

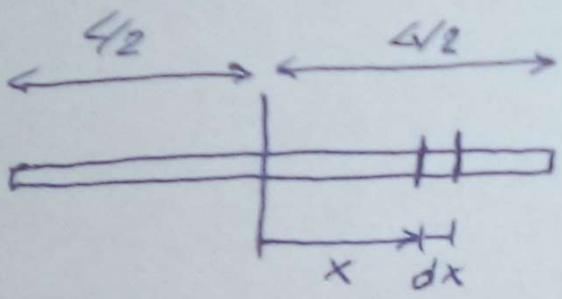
$$\boxed{\vec M = \vec \alpha \cdot I}$$

$$\boxed{\vec F = m \vec a}$$

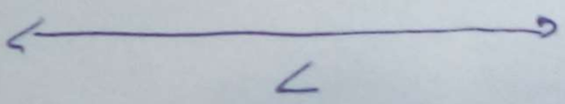
$$\boxed{I = \sum_i m_i \rho_i^2}$$

Одређивање момента инерције

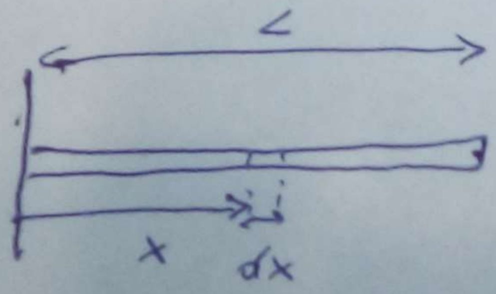
$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 = \int_0^m r^2\, dm = \int_0^V \rho \cdot r^2\, dV$$



$$I = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \rho \cdot \Delta S \cdot dx = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \cdot \frac{m}{\cancel{\Delta S} \cdot L} \cdot \cancel{\Delta S}\, dx$$

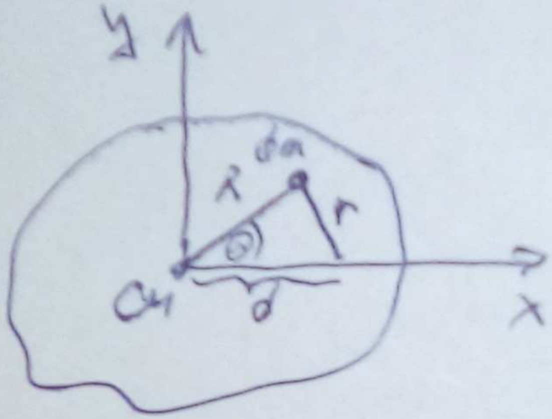


$$I = \frac{x^3}{3}\frac{m}{L}\Bigg|_{-L/2}^{L/2} = \frac{m}{L}\left(\frac{L^3}{3\cdot 8} + \frac{L^3}{3\cdot 8}\right) = \frac{m}{\cancel{L}}\frac{L^{\cancel{3}}}{12} = \frac{mL^2}{12}.$$



$$I = \int_0^L x^2 \cdot \frac{m}{\cancel{\Delta S} L} \cdot \cancel{\Delta S} \cdot dx = \frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^L = \frac{mL^2}{3}.$$

Штајнеров образец



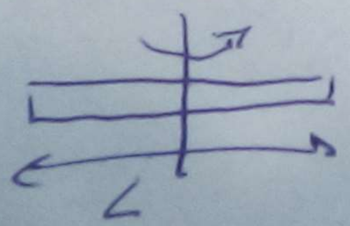
$$I_0 = \int_M R^2\, dm \qquad r^2 = R^2 + d^2 - 2d\underbrace{R\cos\theta}_{x}$$

$$I = \int_M r^2\, dm = \int_M (R^2 + d^2 - 2dx)\, dm$$

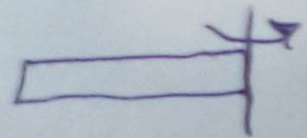
$$I = \int_M r^2\, dM = \int_M R^2\, dm + \underbrace{\int_M d^2\, dm}_{d^2 \int_M dm} - \underbrace{\int_M 2dx\, dm}_{=0}$$

$$\boxed{I = I_0 + Md^2}$$

Пример за штап:



$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2$$



$$I = I_0 + Md^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{ML^2}{4} = \frac{1}{3} ML^2$$

Кинетичка енергија тела при ротацији

Чисто ротација:

$$E_k=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}m_i r_i^2\omega^2=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2}_{I}\Big)\omega^2=\frac{1}{2}I\cdot\omega^2$$

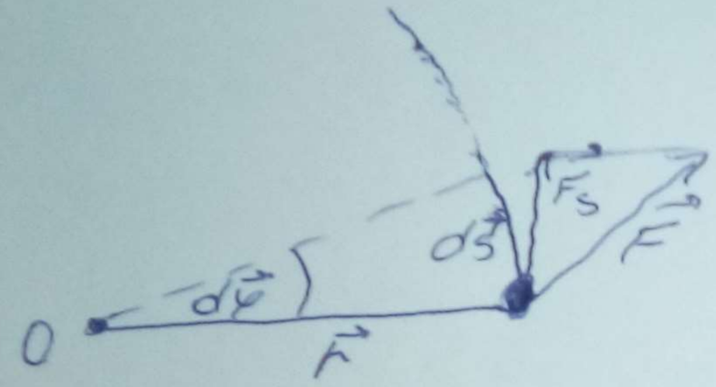
Транслација + ротација:

$$\vec{v}_i=\vec{v}_c+\vec{v}_i^{(K)}=\vec{v}_c+\vec{\omega}\times\vec{r}_i$$

$$E_k=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i v_i^2=\frac{1}{2}v_c^2\sum_{i=1}^{n}m_i+\vec{v}_c\Big(\vec{\omega}\times\underbrace{\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{r}_i}_{m\vec{r}_{cm}=0}\Big)+\frac{1}{2}\omega^2\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2$$

$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}m v_{cm}^2+\frac{1}{2}I\cdot\omega^2}$$

Рад и снага при ротационом кретању тела



$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} = \vec{F}_s\cdot d\vec{s} = \vec{F}_s\cdot(d\vec{\varphi}\times\vec{r})$$

$$dA = \underbrace{(\vec{r}\times\vec{F}_s)}_{\vec{M}}\cdot d\vec{\varphi}$$

$$\boxed{dA = \vec{M}\cdot d\vec{\varphi}}$$

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{M}\cdot d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M}\cdot\vec{\omega}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} dA = \vec{F}\cdot d\vec{s} \\ P = \vec{F}\cdot\vec{v} \end{array}}$$