Numeričke metode

M. Petković

U brojnim slučajevima se srećemo sa potrebom da se izvrši diferenciranje ili integracija određene veličine koja zavisi od, na primer, vremena. Sa druge strane, često nismo u mogućnosti da kontinualno pratimo promenu odgovarajuće fizičke veličine, već merimo njenu vrednost u određenim temperaturskim intervalima. Zbog toga je bitno ovladati:

1. numeričkim metodama za diferenciranje,

2. numeričkim metodama za integraciju,

3. numeričkim metodama za rešavanje diferencijalnih jednačina.

Brojni programski paketi (npr. *Matlab*, *Mathematica*) nude mogućnost da se pomenute operacije izvedu na jednostavan način. Upoznaćemo se sa osnovnim metodama na kojima su zasnovani ovi algoritmi.

1. Numeričko diferenciranje

Pretpostavimo da je neka funkcija poznata samo za određene vrednosti nezavisno promenljive. Na primer, posmatrajmo proces fizisorpcije gasa na nekoj čvrstoj površini, pri čemu su nam poznate vrednosti prekrivenosti površine θ u određenim trenucima t. Brzina adsorpcije v se može proceniti na osnovu izraza

$$v = \frac{d\theta}{dt}$$

Numeričko diferenciranje funkcije $f(x)$ za određenu vrednost nezavisno promenljive x zasniva se na primeni aproksimacija koje omogućuju određivanje izvoda ove funkcije na osnovu podataka koji su nam na raspolaganju (vrednosti funkcije f za određene vrednosti x).

Prvi izvod funkcije je definisan izrazom

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

uz pretpostavku da granična vrednost predstavljena jednačinom (1) postoji (odnosno da je funkcija $f(x)$ diferencijabilna). Razmotrimo nekoliko načina na koje možemo numerički da procenimo vrednost prvog izvoda funkcije.

1.1. Metoda konačnih razlika

Najjednostavniji način za procenu prvog izvoda funkcije sastoji se u tome da se umesto beskonačno malog intervala Δx posmatra konačno mali interval h, te je izvod funkcije u tački x dat izrazom:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

Pretpostavimo da se traži izvod funkcije u tački a, a nama su poznate vrednosti funkcije u tačkama a_1 i a_2 koje su najbliže poznate vrednosti tački a. Gruba procena $f'(a)$ data je sledećim izrazom

$$f'(a) \approx \frac{f(a_2) - f(a_1)}{a_2 - a_1} \qquad (3)$$

***Primer*:**

Pokažimo na primeru kolika je greška ove metode. Posmatrajmo funkciju $f(x) = \sin x$. Pronađimo izvod ove funkcije u tački $x = 0{,}5$ (u radijanima). Pogledajmo najpre čemu je jednak prvi izvod ove funkcije do desete decimale:

$$f'(0{,}5) = \cos 0{,}5 = 0{,}8775825619$$

Izračunajmo približne vrednosti izvoda za različite vrednosti intervala h i izračunajmo koliko se aproksimativna vrednost izvoda razlikuje od stvarne vrednosti. Rezultati su prikazani u tabeli 1.

Tabela 1. Vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \sin x$ u tački 0,5 (u radijanima) izračunata na osnovu jednačine (2) za vrednosti h od $1 \cdot 10^{-1}$ do $1 \cdot 10^{-6}$.

h	$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$	$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
$1 \cdot 10^{-1}$	0,8521693479	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-2}$	0,8751708279	$2{,}4 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{-3}$	0,8773427029	$2{,}4 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^{-4}$	0,8775585892	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-5}$	0,8775801647	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-6}$	0,8775823222	$2{,}4 \cdot 10^{-7}$

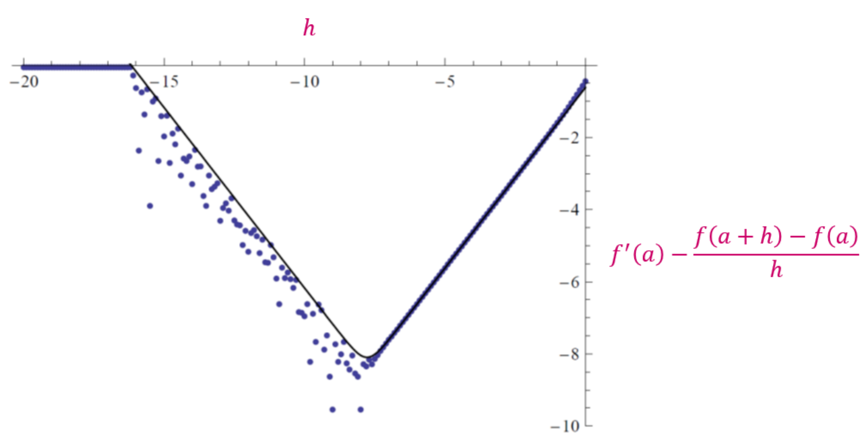
Pri smanjivanju h za red veličine od $1 \cdot 10^{-1}$ do $1 \cdot 10^{-6}$, vrednost odstupanja približne vrednosti izvoda od tačne vrednosti se takođe smanjuje 10 puta. Na osnovu ovih rezultata bi mogao da se izvede pogrešan zaključak da je procenjena vrednost izvoda uvek bliža tačnoj vrednosti ukoliko je manja vrednost h.

Šta se dešava sa daljim smanjivanjem h? Pogledajmo podatke u tabeli 2. Na osnovu dosadašnjeg izlaganja očekivali bismo manju grešku ukoliko h ima manju vrednost. Ali pri veoma malim vrednostima h, brojilac postaje blizak nuli, pa je samim tim i procenjena vrednost izvoda bliska nuli. U analiziranom primeru, najmanja greška se javlja ukoliko h ima vrednost $1 \cdot 10^{-8}$ i $1 \cdot 10^{-9}$, slika 1.

Tabela 2. Vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \sin x$ u tački 0,5 (u radijanima) na osnovu jednačine (2) za vrednosti h. od $1 \cdot 10^{-1}$ do $1 \cdot 10^{-17}$

h	$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$	$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$1 \cdot 10^{-1}$	0,8521693479	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-2}$	0,8751708279	$2{,}4 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{-3}$	0,8773427029	$2{,}4 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^{-4}$	0,8775585892	$2{,}4 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-5}$	0,8775801647	$2{,}4 \cdot 10^{-7}$
$1 \cdot 10^{-6}$	0,8775823222	$2{,}4 \cdot 10^{-7}$
$1 \cdot 10^{-7}$	0,8775825372	$2{,}5 \cdot 10^{-8}$
$\mathbf{1 \cdot 10^{-8}}$	**0,8775825622**	$\mathbf{-2{,}9 \cdot 10^{-10}}$
$\mathbf{1 \cdot 10^{-9}}$	**0,8775825622**	$\mathbf{-2{,}9 \cdot 10^{-10}}$
$1 \cdot 10^{-11}$	0,8775813409	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-14}$	0,8770761895	$5{,}1 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^{-15}$	0,8881784197	$-1{,}1 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-16}$	1,1102230250	$-2{,}3 \cdot 10^{-1}$
$1 \cdot 10^{-17}$	0,0000000000	$8{,}8 \cdot 10^{-1}$

Dakle, treba biti oprezan pri izboru vrednosti intervala h: suviše velika vrednost dovodi do velike greške, budući da je odsupanje približnene vrednosti od tačne vrednosti srazmerno h, dok je pri suviše malim vrednostima h brojilac u jednačini (2) blizak nuli. Izvođenje izraza za optimalnu vrednost h izlazi iz okvira ovog kursa. Grafički prikaz zavisnosti odstupanja izračunate vrednosti od tačne vrednosti dat je na slici 1. Obratite pažnju na to da su skale na apscisi i ordinati logaritamske.



Slika 1. Vrednost greške načinjene korišćenjem jednačine (2) u zavisnosti od vrednosti intervala h. Skale na apscisi i ordinati su logaritamske.

Postoje dve varijante metode konačnih razlika u zavisnosti od toga sa kojim vrednostima nezavisno promenljive raspolažemo: metoda prednje razlike i metoda zadnje razlike. Metoda prednje razlike je data jednačinom (2), dok se izvod funkcije metodom zadnje razlike računa na sledeći način:

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \qquad (4)$$

1.2. Simetrična metoda

Metoda konačnih razlika se može primeniti za računanje prvog izvoda u tački a ukoliko su poznate vrednosti funkcije u tačkama a i $a+h$ pomoću formule (2), odnosno kada su poznate vrednosti funkcije u tačkama a i $a-h$ pomoću formule (4). Kada su poznate vrednosti funkcije u tačkama simetričnim u odnosu na a, tj. $a-h$ i $a+h$, prvi izvod se može proceniti simetričnom metodom, koja predstavlja varijantu metode konačnih razlika:

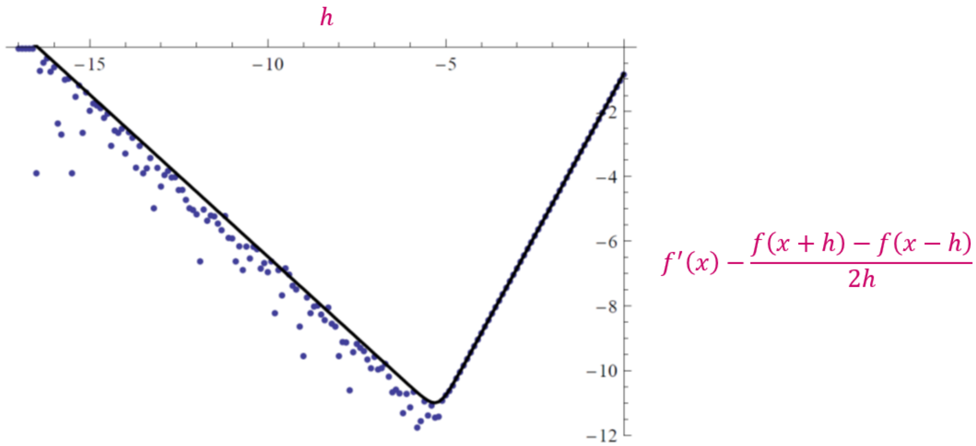
$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \qquad (5)$$

Primenimo ovu metodu da bismo izračunali vrednost funkcije $f(x) = \sin x$ u tački 0,5 (u radijanima). Rezultati su prikazani u tabeli 3.

Tabela 3. Vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \sin x$ u tački 0,5 (u radijanima) na osnovu jednačine (9) za vrednosti h od $1 \cdot 10^{-1}$ do $1 \cdot 10^{-17}$

h	$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$	$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$
$1 \cdot 10^{-1}$	0,8761206554	$1,5 \cdot 10^{-3}$
$1 \cdot 10^{-2}$	0,8775679356	$1,5 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-3}$	0,8775824156	$1,5 \cdot 10^{-7}$
$1 \cdot 10^{-4}$	0,8775824156	$1,5 \cdot 10^{-9}$
$1 \cdot 10^{-5}$	0,8775825619	$1,8 \cdot 10^{-11}$
$\mathbf{1 \cdot 10^{-6}}$	**0,8775825619**	$\mathbf{-7,5 \cdot 10^{-12}}$
$1 \cdot 10^{-7}$	0,8775825616	$2,7 \cdot 10^{-10}$
$1 \cdot 10^{-8}$	0,8775825622	$-2,9 \cdot 10^{-10}$
$1 \cdot 10^{-11}$	0,8775813409	$1,2 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-13}$	0,8776313010	$-4,9 \cdot 10^{-5}$
$1 \cdot 10^{-15}$	0,8881784197	$-1,1 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-17}$	0,0000000000	$8,8 \cdot 10^{-1}$

Veličina greške zavisi od vrednosti intervala h, a najmanja greška je dva reda veličine manja u poređenju sa najmanjom greškom koja se dobija metodom prednje razlike, tabela 2. Zavisnost greške do koje dovodi primena jednačine (5) od h prikazana je na slici 2.



Slika 2. Vrednost greške načinjene korišćenjem jednačine (5) u zavisnosti od vrednosti intervala h. Skale na apscisi i ordinati su logaritamske.

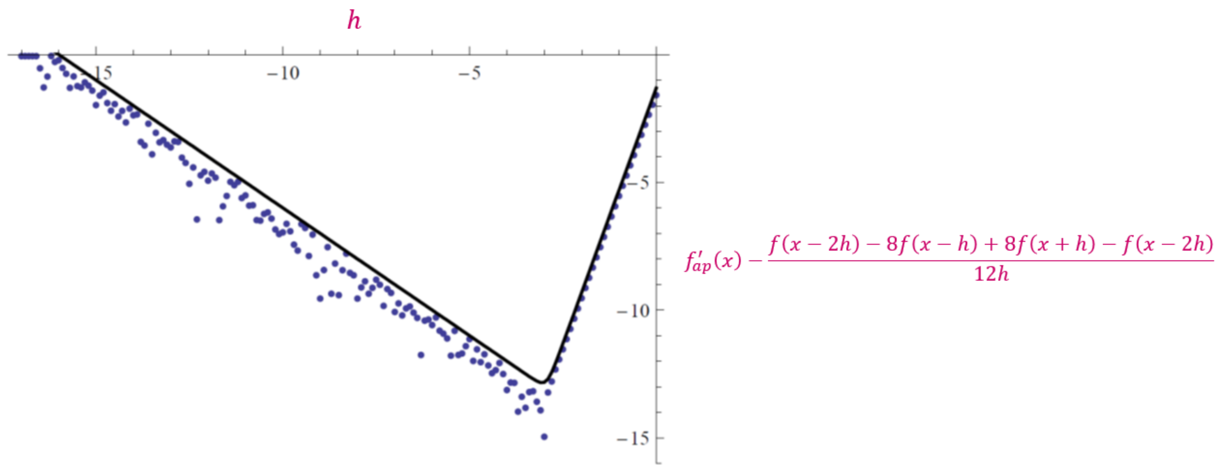
Iz priloženog možemo da zaključimo da primena simetrične metode za približno računanje prvog izvoda funkcije dovodi do manje greške u poređenju sa metodom prednje razlike i metodom zadnje razlike. To je razlog zbog koga je navedena kao posebna metoda, iako predstavlja varijantu metode konačnih razlika.

1.3. Metoda četiri tačke

Pored do sada pomenutih metoda, postoje brojne druge metode za numeričku procenu prvog izvoda funkcije. Odgovarajuće formule su složenijeg oblika, ali se pomoću njih dobijaju preciznije vrednosti prvog izvoda funkcije. Jedna od njih je metoda četiri tačke, za čiju primenu je neophodno poznavati vrednost funkcije u četiri tačke simetrično raspoređene u odnosu na tačku u kojoj se traži izvod, odnosno u tačkama $a-2h$, $a-h$, $a+h$ i $a+2h$:

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h} \qquad (6)$$

Računanje prvog izvoda funkcije pomoću jednačine (6) praćeno je još manjom greškom, kao što je prikazano na slici 3 za primer koji je analiziran metodom konačnih razlika i simetričnom metodom (računanje prvog izvoda funkcije $f(x) = \sin x$ u tački $x = 0{,}5$ u radijanima).



Slika 3. Vrednost greške načinjene korišćenjem jednačine (6) u zavisnosti od vrednosti intervala h. Skale na apscisi i ordinati su logaritamske.

1.4. Drugi izvod

Drugi izvod predstavlja izvod prvog izvoda:

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \qquad (7)$$

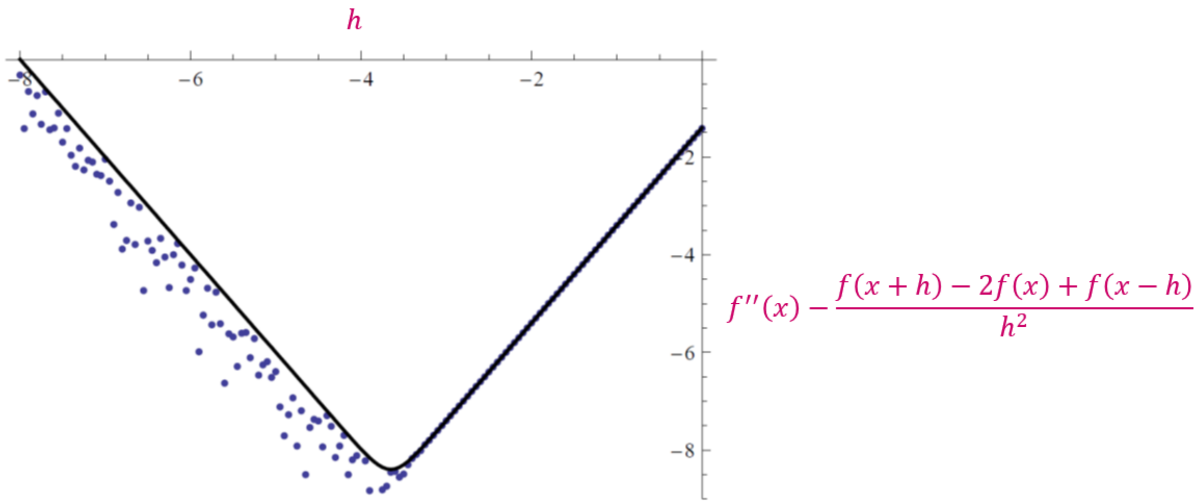
Kombinovanjem jednačina (4) i (7) dobija se

$$f''(a) = \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} = \frac{\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{f(a) - f(a-h)}{h}}{h}$$

odnosno

$$f''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} \qquad (8)$$

Zavisnost vrednosti greške od vrednosti intervala h prikazana je na slici 4.



Slika 4. Vrednost greške načinjene korišćenjem jednačine (8) u zavisnosti od vrednosti intervala h. Skale na apscisi i ordinati su logaritamske.

S obzirom na to da se drugi izvod računa pomoću aproksimativnih vrednosti prvog izvoda, greška pri računanju dugog izvoda je veća od greške načinjene računanjem prvog izvoda. Ovaj zaključak se može izvesti upoređivanjem slika 2 i 4 na kojima su prikazane zavisnosti grešaka pri računanju prvog i drugog izvoda redom jednačinama (5) i (8) od veličine h kada su poznate vrednosti funkcije u dvema tačkama koje su simetrične u odnosu na tačku u kojoj se računaju izvodi.

2. Numerička integracija

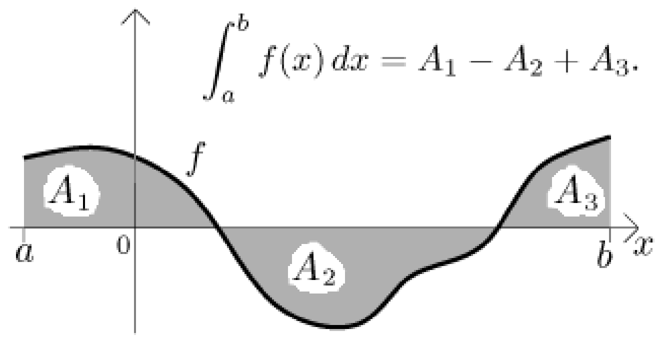
Vratimo se na primer fizisorpcije gasa na čvrstoj površini. Ukoliko su poznate vrednosti brzine adsorpcije u određenim trenucima, a želite da znate kolika je bila prekrivenost površine u određenom trenutku t, služimo se izrazom

$$\theta = \int_0^t v dt$$

Analizirajmo numeričke metode za integraciju. Određeni integral funkcije $f(x)$ u granicama od a do b

$$\int_a^b f(x) dx$$

predstavlja površinu između krive $f(x)$ i apscise, slika 5. Ukoliko je u posmatranom intervalu vrednost funkcije pozitivna, vrednost površine se uzima sa pozitivnim znakom (A_1, A_3), a ako je funkcija negativna, vrednost površine se uzima sa negativnim znakom (A_2).

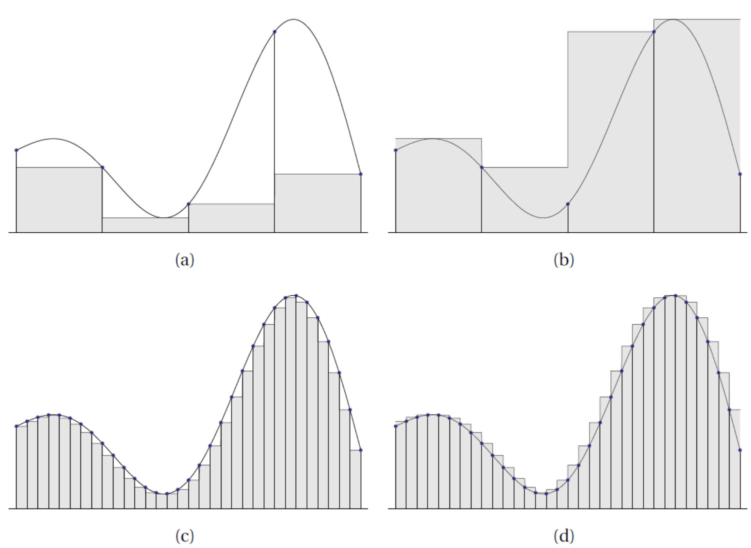


Slika 5. Siva površina predstavlja vrednost određenog integrala u posmatranim granicama.

Pomenućemo nekoliko metoda koje se koriste za numeričku procenu vrednosti određenog integrala.

2.1. Metoda pravougaonika

Podelimo interval $[a, b]$ na podintervale širine h, slika 6. Vrednost integrala u svakom podintervalu bi mogla da se aproksimira površinama pravougaonika kao što je prikazano na slici. Uobičajeno je da širina podintervala ima konstantnu vrednost.



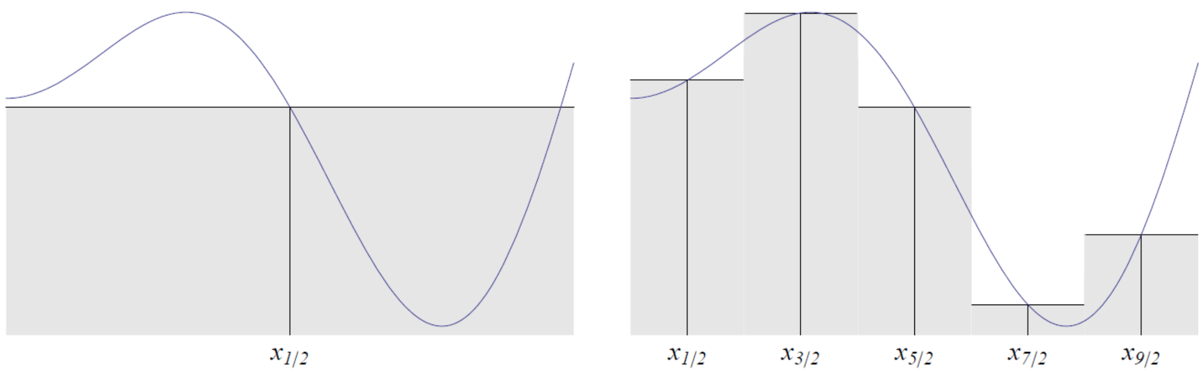
Slika 6. Aproksimacija vrednosti određenog integrala pomoću zbira površina pravougaonika kao što je prikazano na slici poznata je kao Rimanova suma.

Obratite pažnju na to da ukoliko je širina podintervala manja, vrednost aproksimirane površine u manjoj meri odstupa od vrednosti površine ispod funkcije koja se integrali.

Širina podintervala predstavlja jednu stranicu pravougaonika. Druga stranica pravougaonika može da se izabere na više načina i to može da bude:

1. vrednost funkcije na početku intervala;
2. minimalna vrednost funkcije u posmatranom podintervalu;
3. maksimalna vrednost funkcije u posmatranom podintervalu;
4. vrednost funkcije u tački na sredini intervala.

Kada se kao druga stranica pravougaonika izaberu minimalna ili maksimalna vrednost funkcije u podintervalu, približne vrednosti integrala su redom manje i veće od tačne vrednosti. Kod metode srednje tačke drugu stranicu pravougaonika predstavlja vrednost funkcije u tački na sredini podintervala, slika 7. Ovakvim izborom druge stranice pravougaonika se postiže bolje slaganje sa tačnom vrednošću integrala jer je površina pravougaonika u pojedinim podintervalima veća, a u pojedinim manja od površine ispod funkcije, te pozitivna i negativna odstupanja dovode do potiranja grešaka.



Slika 7. Aproksimacija vrednosti određenog integrala metodom srednje tačke. Što je veći broj intervala, manje je odstupanje aproksimirane vrednosti od tačne vrednosti integrala.

Približna vrednost integrala procenjena metodom srednje tačke data je jednačinom (9)

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) \qquad (9)$$

pri čemu je

$$x_{i-1/2} = \frac{x_i - x_{i-1}}{2} = a + h\left(i - \frac{1}{2}\right) \qquad (10)$$

vrednost nezavisno promenljive na sredini podintervala.

***Primer*:**

Izračunajmo vrednost integrala funkcije $f(x) = \cos x$ u granicama od 0 do 1 (u radijanima). Vrednost integrala prikazana do desete decimale iznosi

$$I = \int_0^1 \cos x \, dx = \sin 1 - \sin 0 = 0{,}8414709848$$

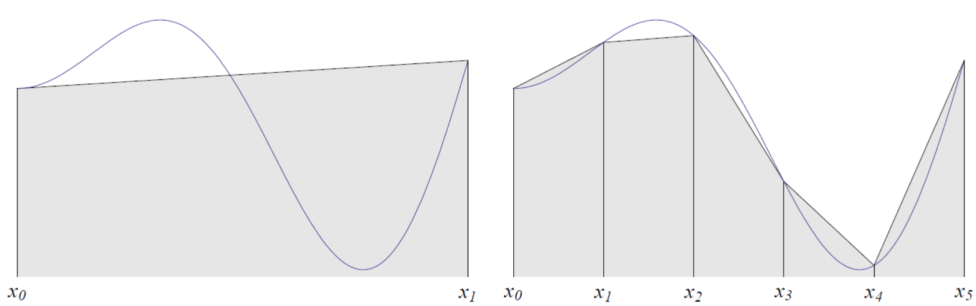
Aproksimativna vrednost integrala izračunata za različite vrednosti podintervala h i odstupanje izračunate vrednosti od tačne vrednosti integrala prikazani su u tabeli 4. Početna vrednost h iznosi 0,5. Svaka sledeća vrednost podintervala je dvostruko manja od prethodne. Što je manja vrednost h, manje je i odstupanje približne vrednosti integrala od tačne vrednosti.

Tabela 4. Vrednost integrala I_{mst} funkcije $f(x) = \cos x$ u interval od 0 do 1 (u radijanima) izračunata na osnovu jednačine (9) za različite vrednosti intervala h i odstupanje izračunate vrednosti od tačne vrednosti integrala $(I - I_{mst})$.

h	I_{mst}	$I - I_{mst}$
0,500000	0,85030065	$-8{,}8 \cdot 10^{-3}$
0,250000	0,84366632	$-2{,}2 \cdot 10^{-3}$
0,125000	0,84201907	$-5{,}5 \cdot 10^{-4}$
0,062500	0,84160796	$-1{,}4 \cdot 10^{-4}$
0,031250	0,84150523	$-3{,}4 \cdot 10^{-5}$
0,015625	0,84147954	$-8{,}6 \cdot 10^{-6}$
0,007813	0,84147312	$-2{,}1 \cdot 10^{-6}$
0,003906	0,84147152	$-5{,}3 \cdot 10^{-7}$
0,001953	0,84147112	$-1{,}3 \cdot 10^{-7}$
0,000977	0,84147102	$-3{,}3 \cdot 10^{-8}$

2.2. Metoda trapeza

Metoda trapeza je slična metodi srednje tačke, s tom razlikom što se umesto pravougaonika čija je jedna stranica jednaka veličini podintervala h, a druga vrednosti funkcije na sredini intervala posmatra trapez čije su osnovice vrednosti funkcije na krajevima podintervala, slika 8.



Slika 8. Procena vrednosti integrala metodom trapeza kada broj podintervala iznosi jedan (levo) i pet (desno).

Procena vrednosti integrala metodom trapeza data je sledećom jednačinom

$$\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n}\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2} = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)\right] \qquad (11)$$

gde je n broj podintervala. Očigledno je da se povećanjem broja podintervala smanjuje greška.

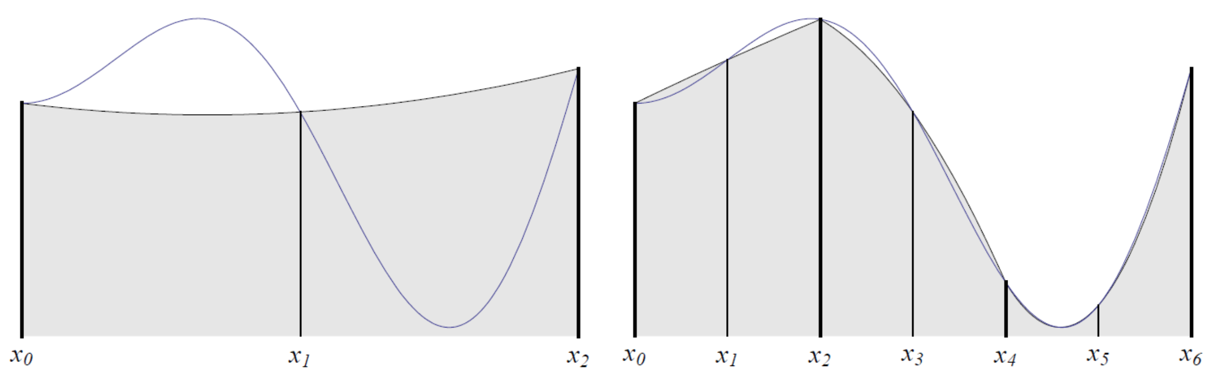
Vrednosti integrala iz prethodnog primera, izračunate metodom trapeza, prikazane su u tabeli 5.

Tabela 5. Vrednost integrala I_{mt} funkcije $f(x) = \cos x$ u interval od 0 do 1 (u radijanima) izračunata na osnovu jednačine (11) za različite vrednosti intervala h i odstupanje izračunate vrednosti od tačne vrednosti integrala $(I - I_{mt})$.

h	I_{mt}	$I - I_{mt}$
0,500000	0,82386686	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$
0,250000	0,83708375	$4{,}4 \cdot 10^{-3}$
0,125000	0,84037503	$1{,}1 \cdot 10^{-3}$
0,062500	0,84119705	$2{,}7 \cdot 10^{-4}$
0,031250	0,84140250	$6{,}8 \cdot 10^{-5}$
0,015625	0,84145386	$1{,}7 \cdot 10^{-5}$
0,007813	0,84146670	$4{,}3 \cdot 10^{-6}$
0,003906	0,84146991	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$
0,001953	0,84147072	$2{,}6 \cdot 10^{-7}$
0,000977	0,84147092	$6 \cdot 10^{-8}$

2.3. Simpsonova metoda

Kod Simpsonove metode za numeričku integraciju se posmatra paran broj podintervala, a kroz vrednosti funkcije u tri susedne tačke se provlači parabola, kao na slici 9.



Slika 9. Procena vrednosti integrala Simpsonovom metodom pomoću dva (levo) i šest (desno) podintervala.

Vrednost integrala se Simpsonovom metodom procenjuje sledećom jednačinom

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i-1})\right] \qquad (12)$$

Vrednosti integrala koje su procenjene metodom pravougaonika i trapeza su izračunate i Simpsonovom metodom, a rezultati su prikazani u tabeli 6.

Tabela 6. Vrednost integrala I_{ms} funkcije $f(x) = \cos x$ u interval od 0 do 1 (u radijanima) izračunata na osnovu jednačine (12) za različite vrednosti intervala h i odstupanje izračunate vrednosti od tačne vrednosti integrala $(I - I_{ms})$.

h	I_{ms}	$I - I_{ms}$
0,500000	0,84177209	$-3{,}0 \cdot 10^{-4}$
0,250000	0,84148938	$-1{,}8 \cdot 10^{-5}$
0,125000	0,84147213	$-1{,}1 \cdot 10^{-6}$
0,062500	0,84147106	$-8 \cdot 10^{-8}$
0,031250	0,84147099	$-1 \cdot 10^{-8}$
0,015625	0,84147099	$-1 \cdot 10^{-8}$
0,007813	0,84147098	0
0,003906	0,84147098	0
0,001953	0,84147098	0
0,000977	0,84147098	0

Za razliku od metode srednje tačke i metode trapeza kod kojih je greška srazmerna h^2, Simpsonova metoda dovodi do greške koja je srazmerna h^4 (uporedite odstupanja izračunate vrednosti integrala od tačne vrednosti za različite vrednosti podintervala u tabelama 4, 5 i 6).

3. Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina

Ukoliko ne postoji analitičko rešenje neke diferencijalne jednačine ili sistema diferencijalnih jednačina, pribegava se numeričkim metodama. Na primer, u kvantno-dinamičkim proračunima potrebno je rešiti vremenski zavisnu Šredingerovu jednačinu

$$i\hbar\frac{\partial\Psi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\Psi(\boldsymbol{r},t)$$

za šta su u okviru raznih programskih paketa razvijeni algoritmi koji su zasnovani na numeričkim metodama za rešavanje diferencijalnih jednačina i sistema diferencijalnih jednačina. U okviru ovog kursa, pomenućemo Ojlerovu metodu.

3.1. Ojlerova metoda

Ojlerova metoda predstavlja jednu od najjednostavnijih metoda za numeričko rešavanje običnih linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Posmatrajmo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (13)$$

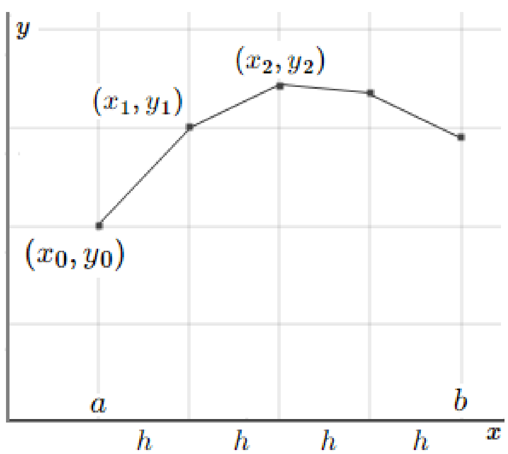
pri čemu su dati početni uslovi, odnosno poznata nam je vrednost zavisno promenljive y u tački x_0, $y_0 = y(x_0)$. Traži se vrednosti funkcije y_n u tački x_n. Podelimo najpre interval od x_0 do x_n u n podintervala širine h. Ako beskonačno male promene u jednačini (13) zamenimo konačno malim promenama, dobija se

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h} \approx f(x_0, y_0) \qquad (14)$$

odakle sledi

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) \qquad (15)$$

Ojlerova metoda za rešavanja linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda zasniva se na jednačini (15): na osnovu početnih uslova (x_0, y_0) nalazimo vrednost funkcije u tački $y_1 = y(x_1)$ u tački $x_1 = x_0 + h$; na osnovu vrednosti (x_1, y_1) nalazimo vrednost funkcije u tački $y_2 = y(x_2)$ u tački $x_2 = x_1 + h$ itd. Postupak se ponavlja do konačne vrednosti nezavisno promenljive za koju tražimo vrednost funkcije. Na slici 10 je slikovito prikazana Ojlerova metoda kada je poznata vrednost funkcije u tački a, dok do vrednosti funkcije u tački b dolazimo nakon četiri koraka.



Slika 10. Prikaz rešavanja diferencijalne jednačine Ojlerovom metodom.

Očigledno je da manja vrednost koraka h vodi preciznijem rešenju. Takođe, što smo udaljeniji od početne vrednosti nezavisno promenljive, veće je odstupanje aproksimirane vrednosti funkcije od njene stvarne vrednosti.