Општа теорија угаоних момената

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}\,.$$

О угаоном моменту се може говорити у конкретним случајевима као о орбитном угаоном моменту ($\vec{l}$), спинском угаоном моменту ($\vec{s}$), али се може говорити и о генералисаном угаоном моменту који ћемо означавати са $\vec{J}$.

Под *орбитним* угаоним моментом ћемо сматрати сваки угаони момент који има класични еквивалент, за разлику од *спинског* угаоног момента који нема класичан еквивалент (типично је квантно-механички угаони момент) и који представља унутрашњи угаони момент елементарних честица.

Дефиниције

Комутационе релације

$$\left[\hat{J}_x, \hat{J}_y\right] = i\hbar\hat{J}_z$$
$$\left[\hat{J}_y, \hat{J}_z\right] = i\hbar\hat{J}_x$$
$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_x\right] = i\hbar\hat{J}_y$$

Будући да ове три компоненте међусобно не комутирају, не могу се симултано одредити њихове својствене вредности без дисперзије резултата мерења. Другим речима, они немају заједничка својствена стања.

Оператор $\hat{\vec{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2$ је скалар и као такав комутира са $\hat{J}_x$, $\hat{J}_y$ и $\hat{J}_z$:

$$\left[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_k\right] = 0 \qquad k = x, y, z\,.$$

Последично, свака компонента опсервабле $\hat{\vec{J}}$ се може одвојено дијагонализовати са $\hat{\vec{J}}^2$ тако да имају заједничке својствене функције. Међутим, пошто компоненте међусобно не комутирају, бира се само једна од њих, и према конвенцији то је компонента $\hat{J}_z$ (мада, нема ничег посебног у вези са z правцем, могли смо узети и неку другу компоненту).

Лествичасти оператори угаоних момената

За потребе одређивања својствених вредности опсервабли $\hat{\vec{J}}^2$ и $\hat{J}_z$ увешћемо тзв. *лествичасте* операторе (енгл. *ladder operator*): **оператор подизања** (*raising operator*) $\hat{J}_+$ и **оператор спуштања** (*lowering operator*) $\hat{J}_-$, који су дефинисани на следећи начин:

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y\,.$$

Помоћу оператора $\hat{J}_{\pm}$ можемо изразити компоненте $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_y$:

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right)$$

$$\hat{J}_y = \frac{1}{2i}\left(\hat{J}_+ - \hat{J}_-\right).$$

$$\hat{J}_x{}^2 = \frac{1}{4}\left(\hat{J}_+{}^2 + \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_-{}^2\right) \qquad \hat{J}_y{}^2 = -\frac{1}{4}\left(\hat{J}_+{}^2 - \hat{J}_+\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_+ + \hat{J}_-{}^2\right)$$

$$\hat{J}_x{}^2 + \hat{J}_y{}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+\right)$$

$$\hat{\vec{J}}^2 = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_-\hat{J}_+\right) + \hat{J}_z{}^2.$$

$$\hat{J}_+\hat{J}_- = \hat{J}_x{}^2 + \hat{J}_y{}^2 + \hbar\hat{J}_z = \hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_z{}^2 + \hbar\hat{J}_z$$

$$\hat{J}_-\hat{J}_+ = \hat{J}_x{}^2 + \hat{J}_y{}^2 - \hbar\hat{J}_z = \hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_z{}^2 - \hbar\hat{J}_z.$$

$$\left[\hat{J}_+, \hat{J}_-\right] = 2\hbar\hat{J}_z$$

$$\left[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_+\right] = 0 \qquad \left[\hat{\vec{J}}^2, \hat{J}_-\right] = 0$$

$$\left[\hat{J}_z, \hat{J}_+\right] = \hbar\hat{J}_+ \qquad \left[\hat{J}_z, \hat{J}_-\right] = -\hbar\hat{J}_-.$$

Својствене вредности оператора угаоног момента

Оператори $\hat{\vec{J}}^2$ и $\hat{J}_z$ су опсервабле које имају заједничка својствена стања.

Означимо та стања са $\left|\alpha, \beta\right\rangle$, а својствене вредности $\hat{\vec{J}}^2$ и $\hat{J}_z$ са, редом, $\alpha\hbar^2$ и $\beta\hbar$:

$$\hat{\vec{J}}^2\left|\alpha, \beta\right\rangle = \hbar^2\alpha\left|\alpha, \beta\right\rangle$$

$$\hat{J}_z\left|\alpha, \beta\right\rangle = \hbar\beta\left|\alpha, \beta\right\rangle.$$

Фактор $\hbar^2$ и $\hbar$ смо увели да би α и β били бездимензиони.

Претпоставимо да су ова стања ортонормирана, тј. да важи $\left\langle\alpha', \beta' \middle| \alpha, \beta\right\rangle = \delta_{\alpha'\alpha}\delta_{\beta'\beta}$.

Први циљ нам је да одредимо бројеве α и β, тј. својствене вредности ових оператора.

Деловање $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ на $|\alpha,\beta\rangle$

Размотримо како $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ делују на кетове $|\alpha,\beta\rangle$.

Прво, будући да $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ не комутирају са $\hat{J}_z$ (мада комутирају са $\hat{\vec{J}}^2$), кетови $|\alpha,\beta\rangle$ нису својствена стања од $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$.
Користећи комутационе релације можемо писати:

$$\hat{J}_z\left[\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle\right]=\left(\hat{J}_z\hat{J}_+\right)|\alpha,\beta\rangle=\left(\hat{J}_+\hat{J}_z+\hbar\hat{J}_+\right)|\alpha,\beta\rangle=\hat{J}_+\hbar\beta|\alpha,\beta\rangle+\hbar\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle=$$
$$=\hbar(\beta+1)\left[\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle\right]$$
$$\hat{J}_z\left[\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle\right]=\left(\hat{J}_z\hat{J}_-\right)|\alpha,\beta\rangle=\left(\hat{J}_-\hat{J}_z-\hbar\hat{J}_-\right)|\alpha,\beta\rangle=\hat{J}_-\hbar\beta|\alpha,\beta\rangle-\hbar\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle=$$
$$=\hbar(\beta-1)\left[\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle\right]$$

Закључујемо да је кет $\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle$ својствено стање од $\hat{J}_z$ са својственом вредности $\hbar(\beta+1)$, а кет $\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle$ својствено стање од $\hat{J}_z$ са својственом вредности $\hbar(\beta-1)$.

Будући да $\hat{J}_z$ и $\hat{\vec{J}}^2$ комутирају, $\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle$ и $\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle$ су својствена стања и од $\hat{\vec{J}}^2$.

$$\hat{\vec{J}}^2\left[\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle\right]=\hat{J}_+\hat{\vec{J}}^2|\alpha,\beta\rangle=\hat{J}_+\hbar^2\alpha|\alpha,\beta\rangle=\hbar^2\alpha\left[\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle\right]$$
$$\hat{\vec{J}}^2\left[\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle\right]=\hat{J}_-\hat{\vec{J}}^2|\alpha,\beta\rangle=\hat{J}_-\hbar^2\alpha|\alpha,\beta\rangle=\hbar^2\alpha\left[\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle\right]$$

Према томе, кетови $\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle$ и $\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle$ су својствена стања и од $\hat{\vec{J}}^2$ са својственом вредности $\hbar^2\alpha$.

Шта можемо закључити у вези са деловањем $\hat{J}_+$ и $\hat{J}_-$ на кетове $|\alpha,\beta\rangle$?
Будући да су $\hbar(\beta+1)$ и $\hbar(\beta-1)$ недегенерисане својствене вредности и да имају једну својствену функцију (до на константу), тј. $|\alpha,\beta+1\rangle$ и $|\alpha,\beta-1\rangle$, редом, закључујемо да је кет $\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle$ пропорционалан кету $|\alpha,\beta+1\rangle$, а $\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle$ пропорционалан кету $|\alpha,\beta-1\rangle$:

$$\hat{J}_+|\alpha,\beta\rangle=C^+_{\alpha\beta}|\alpha,\beta+1\rangle$$
$$\hat{J}_-|\alpha,\beta\rangle=C^-_{\alpha\beta}|\alpha,\beta-1\rangle,$$

где су $C^{\pm}_{\alpha\beta}$ коефицијенти које ћемо одредити у наставку.

Заиста, добија се $\hat{J}_z|\alpha,\beta+1\rangle=\hbar(\beta+1)|\alpha,\beta+1\rangle$ и $\hat{\vec{J}}^2|\alpha,\beta+1\rangle=\hbar^2\alpha|\alpha,\beta+1\rangle$.

Такође, $\hat{J}_z|\alpha,\beta-1\rangle=\hbar(\beta-1)|\alpha,\beta-1\rangle$ и $\hat{\vec{J}}^2|\alpha,\beta-1\rangle=\hbar^2\alpha|\alpha,\beta-1\rangle$, Коефицијент $C_{\alpha\beta}^{+}$ одређујемо тако што са леве стране делујемо ермитски конјугованим изразом од, тј. са $\langle\alpha,\beta|\hat{J}_{-}=(C_{\alpha\beta}^{+})^{*}\langle\alpha,\beta+1|$, па се добија:

$$\langle\alpha,\beta|\hat{J}_{-}\hat{J}_{+}|\alpha,\beta\rangle=(C_{\alpha\beta}^{+})^{*}C_{\alpha\beta}^{+}\langle\alpha,\beta+1|\alpha,\beta+1\rangle=\left|C_{\alpha\beta}^{+}\right|^{2}=(C_{\alpha\beta}^{+})^{2},$$

јер је база ортонормирана и јер је средња вредност $\langle\hat{J}_{-}\hat{J}_{+}\rangle$ реална.

Ако сад $\hat{J}_{-}\hat{J}_{+}$ заменимо са $\hat{\vec{J}}^{2}-\hat{J}_{z}^{2}-\hbar\hat{J}_{z}$, добија се $(C_{\alpha\beta}^{+})^{2}=\hbar^{2}(\alpha-\beta^{2}-\beta)=\hbar^{2}\left[\alpha-\beta(\beta+1)\right]$, одакле следи:

$$\hat{J}_{+}|\alpha,\beta\rangle=\hbar\sqrt{\alpha-\beta(\beta+1)}\,|\alpha,\beta+1\rangle.$$

$$\hat{J}_{-}|\alpha,\beta\rangle=\hbar\sqrt{\alpha-\beta(\beta-1)}\,|\alpha,\beta-1\rangle.$$

Однос између α и β

Будући да су $\hat{\vec{J}}^{2}$ и $\hat{J}_{z}$ ермитски оператори, за сад знамо о овим бројевима да су реални. Прво ћемо показати да за дату својствену вредност α постоји горња граница за квантни број β. То је последица чињенице да је средња вредност оператора $\hat{\vec{J}}^{2}-\hat{J}_{z}^{2}\geq 0$ (јер је средња вредност $\hat{\vec{J}}^{2}-\hat{J}_{z}^{2}=\hat{J}_{x}^{2}+\hat{J}_{y}^{2}\geq 0$):

$$\langle\alpha,\beta|\left(\hat{\vec{J}}^{2}-\hat{J}_{z}^{2}\right)|\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\beta|\left(\hbar^{2}\alpha|\alpha,\beta\rangle-\hbar^{2}\beta^{2}|\alpha,\beta\rangle\right)=\hbar^{2}\alpha-\hbar^{2}\beta^{2}=\hbar^{2}\left(\alpha-\beta^{2}\right)\geq 0$$

из чега следи

$$\alpha\geq\beta^{2}.$$

Будући да β има горњу границу $\beta_{\max}$, мора постојати стање $|\alpha,\beta_{\max}\rangle$ које се не може даље подизати:

$$\hat{J}_{+}|\alpha,\beta_{\max}\rangle=0.$$

Ако делујемо са леве стране ове једнакости оператором $\hat{J}_{-}$, добијамо следећи резултат:

$\hat{J}_{-}\hat{J}_{+}|\alpha,\beta_{\max}\rangle=0$, односно

$$\hat{J}_{-}\hat{J}_{+}|\alpha,\beta_{\max}\rangle=\left(\hat{\vec{J}}^{2}-\hat{J}_{z}^{2}-\hbar\hat{J}_{z}\right)|\alpha,\beta_{\max}\rangle=\hbar^{2}\left(\alpha-\beta_{\max}^{2}-\beta_{\max}\right)|\alpha,\beta_{\max}\rangle=0,$$

одакле следи $\alpha-\beta_{\max}^{2}-\beta_{\max}=0$, tj.

$$\alpha=\beta_{\max}\left(\beta_{\max}+1\right)$$

Након n сукцесивних примена $\hat{J}_{-}$ на $|\alpha,\beta_{\max}\rangle$, долази се до стања $|\alpha,\beta_{\min}\rangle$ које се даље не може спуштати:

$$\hat{J}_{-}|\alpha,\beta_{\min}\rangle=0.$$

Ако делујемо са леве стране оператором $\hat{J}_{+}$, добија се:

$\hat{J}_{+}\hat{J}_{-}|\alpha,\beta_{\min}\rangle=0$, односно

$$\hat{J}_+\hat{J}_-\left|\alpha,\beta_{\min}\right\rangle=\left(\hat{\vec{J}}^2-\hat{J}_z^{\,2}+\hbar\hat{J}_z\right)\left|\alpha,\beta_{\min}\right\rangle=\hbar^2\left(\alpha-\beta_{\min}^{\;\;2}+\beta_{\min}\right)\left|\alpha,\beta_{\min}\right\rangle=0,$$

одакле следи $\alpha-\beta_{\min}^{\;\;2}+\beta_{\min}=0$ или

$$\alpha=\beta_{\min}\left(\beta_{\min}-1\right).$$

Изједначујући добија се:

$$\beta_{\max}=-\beta_{\min}.$$

С обзиром на то да је $\beta_{\min}$ добијено након n примена $\hat{J}_-$ на $\left|\alpha,\beta_{\max}\right\rangle$ (при чему је n цео број), следи да је

$$\beta_{\max}=\beta_{\min}+n.$$

закључујемо да је

$$\beta_{\max}=\frac{n}{2}$$

што значи да $\beta_{\max}$ може бити цео број или полу-цео број, зависно од тога да ли је n паран или непаран број.

Квантни бројеви j и m

Након претходних разматрања, уводимо познату нотацију према којој се уместо $\beta_{\max}$ и β уводе, редом, j и m. Према томе:

$$\alpha=j\left(j+1\right)\qquad\beta=m$$

при чему дозвољене вредности за m леже између $-j$ и j:

$$-j\le m\le j.$$

Деловање оператора на базу $\left\{\left|j,m\right\rangle\right\}$

Ове резултате можемо сумирати на следећи начин: Једначине својствених вредности оператора $\hat{\vec{J}}^2$ и $\hat{J}_z$, који имају заједничке својствене векторе $\left|j,m\right\rangle$, су:

$$\hat{\vec{J}}^2\left|j,m\right\rangle=\hbar^2 j\left(j+1\right)\left|j,m\right\rangle$$

$$\hat{J}_z\left|j,m\right\rangle=\hbar m\left|j,m\right\rangle,$$

где $j=0,\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},...$ (цео или полу-цео број), а $m=-j,-j+1,...,j-1,j$. Тако за свако j постоје $2j+1$ вредности за m. Својствена стања $\left|j,m\right\rangle$ су нормирана и међусобно ортогонална: $\left\langle j',m'\right|\left.j,m\right\rangle=\delta_{j'j}\delta_{m'm}$.

За лествичасте операторе, следи:

$$\hat{J}_+ | j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,| j,m+1\rangle$$
$$\hat{J}_- | j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,| j,m-1\rangle$$

Деловање оператора $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_y$ на векторе базе $| j,m\rangle$ се једноставно може извести из формула а на основу деловања лествичастих оператора:

$$\hat{J}_x | j,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,| j,m+1\rangle + \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,| j,m-1\rangle\right]$$
$$\hat{J}_y | j,m\rangle = \frac{\hbar}{2i}\left[\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,| j,m+1\rangle - \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,| j,m-1\rangle\right].$$

Можемо још одредити и средње вредности оператора $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_y$ у стању $| j,m\rangle$.

Из формула директно следи: $\langle \hat{J}_x \rangle = 0$ и $\langle \hat{J}_y \rangle = 0$.

Такође, из формула се изводе средње вредности квадрата оператора када је систем у стању $| j,m\rangle$:

$$\langle \hat{J}_x{}^2 \rangle = \langle \hat{J}_y{}^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1)-m^2\right].$$

Матрична репрезентација угаоних момената

Досадашњи формализам је био уопштен и није зависио ни од једне базе. Постоји више начина да се репрезентују оператори угаоног момента и њихова својствена стања; ми ћемо их представити помоћу матрица у дискретној бази.

С обзиром да $\hat{\vec{J}}^2$ и $\hat{J}_z$ комутирају и да имају заједничка својствена стања, скуп њихових својствених стања $\{| j,m\rangle\}$ се може изабрати за базу простора стања; ова база је дискретна, ортонормирана и комплетна. Услов ортонормираности базе је (већ смо навели) $\langle j'm' | jm\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}$, а релација комплетности базе $\sum_{m=-j}^{j} | j,m\rangle\langle j,m| = \hat{I}$. Наравно, $\hat{\vec{J}}^2$ и $\hat{J}_z$ су дијагонални у овој бази, а њихови матрични елементи су:

$$\langle j',m' | \hat{\vec{J}}^2 | j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)\delta_{j'j}\delta_{m'm}$$
$$\langle j',m' | \hat{J}_z | j,m\rangle = \hbar m\delta_{j'j}\delta_{m'm}$$

Према томе, матрице су дијагоналне, а на дијагоналама су им својствене вредности.

Оператори подизања и спуштања у овој бази нису дијагонални. Њихови матрични елементи су:

$$\langle j',m' | \hat{J}_+ | j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m+1}$$
$$\langle j',m' | \hat{J}_- | j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m-1}$$

Матрични елементи оператора $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_y$ су:

$$\langle j',m' | \hat{J}_x | j,m\rangle = \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m+1} + \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m-1}\right]$$
$$\langle j',m' | \hat{J}_y | j,m\rangle = \frac{\hbar}{2i}\left[\sqrt{j(j+1)-m(m+1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m+1} - \sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\,\delta_{j'j}\delta_{m',m-1}\right]$$

Примери:

1. Размотримо случај када је $j=0$. Тада је $m=0$. Својствене вредности свих оператора угаоног момента су једнаке нули; другим речима, систем нема угаони момент.

2. Размотримо случај $j=1$. Могући резултат мерења опсервабле $\hat{\vec{J}}^2$ је једино $2\hbar^2$ (кажемо да је, према томе, интензитет вектора $\vec{J}$ једнак $\hbar\sqrt{2}$). Могући резултати мерења $\hat{J}_z$ су $\hbar$, 0 или $-\hbar$. Матрице ових оператора у својственој бази $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$ су:

$$\hat{\vec{J}}^2 = \begin{pmatrix} \langle 1,1|\hat{\vec{J}}^2|1,1\rangle & \langle 1,1|\hat{\vec{J}}^2|1,0\rangle & \langle 1,1|\hat{\vec{J}}^2|1,-1\rangle \\ \langle 1,0|\hat{\vec{J}}^2|1,1\rangle & \langle 1,0|\hat{\vec{J}}^2|1,0\rangle & \langle 1,0|\hat{\vec{J}}^2|1,-1\rangle \\ \langle 1,-1|\hat{\vec{J}}^2|1,1\rangle & \langle 1,-1|\hat{\vec{J}}^2|1,0\rangle & \langle 1,-1|\hat{\vec{J}}^2|1,-1\rangle \end{pmatrix} = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_z = \begin{pmatrix} \langle 1,1|\hat{J}_z|1,1\rangle & \langle 1,1|\hat{J}_z|1,0\rangle & \langle 1,1|\hat{J}_z|1,-1\rangle \\ \langle 1,0|\hat{J}_z|1,1\rangle & \langle 1,0|\hat{J}_z|1,0\rangle & \langle 1,0|\hat{J}_z|1,-1\rangle \\ \langle 1,-1|\hat{J}_z|1,1\rangle & \langle 1,-1|\hat{J}_z|1,0\rangle & \langle 1,-1|\hat{J}_z|1,-1\rangle \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

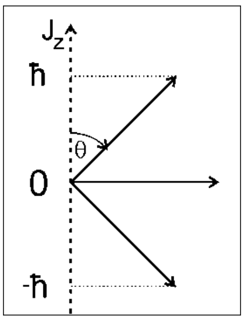
Матрице за операторе $\hat{J}_+$, $\hat{J}_-$, $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_y$, које нису дијагоналне,

$$\hat{J}_+ = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_- = \hbar\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\hat{J}_x = \frac{1}{2}\left(\hat{J}_+ + \hat{J}_-\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J}_y = \frac{i}{2}\left(\hat{J}_- - \hat{J}_+\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Геометријска репрезентација угаоних момената

Са геометријском репрезентацијом угаоних момената сусрели сте се раније на студијама, у оквиру тзв. «векторског модела». Тада су коришћени резултати квантне теорије које смо представили у овом поглављу. За фиксирану вредност j, $\vec{J}$ се може представити вектором чија је дужина дата са $\hbar\sqrt{j(j+1)}$ и чија је компонента дуж изабране z осе $J_z = \hbar m$.



С обзиром да $\hat{J}_x$ и $\hat{J}_y$ нису појединачно прецизно дефинисани (систем је у стању својствених вектора $\hat{\vec{J}}^2$ и $\hat{J}_z$), само $\hat{J}_x^{\,2} + \hat{J}_y^{\,2} = \hat{\vec{J}}^2 - \hat{J}_z^{\,2}$ је добро дефинисан. Осим тога, средње вредности $\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$. Пројекција вектора $\vec{J}$ на z осу је увек $\hbar m$. Размишљајући геометријски, можемо замислити да се $\vec{J}$ графички репрезентује вектором чија је дужина $\hbar\sqrt{j(j+1)}$ и који се налази било где на површини конуса са полу-углом $\theta = \arccos\left(\frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}\right)$ (видети слику за $j=1$). Све оријентације $\vec{J}$ на површини конуса су једнако вероватне јер $\langle \hat{J}_x \rangle = \langle \hat{J}_y \rangle = 0$.