

ПОГЛАВЉЕ 10: ИНТЕГРАЛНЕ ТРАНСФОРМАЦИЈЕ Задаци

Извршите Лапласова трансформације без коришћења таблица:

Задатак 1

$$f(t) = 5,$$

Задатак 2

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t \leq 1 \\ -1, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Задатак 3

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ -1 & 1 < t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

Задатак 4

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < t_0 \\ 2 \cdot t_0 - t & t_0 \leq t < 2 \cdot t_0 \\ 0 & t > 2 \cdot t_0 \end{cases}$$

Задатак 5

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_0 \\ c & t \geq t_0 \end{cases}$$

Задатак 6

$$h(t) = 5 \cdot e^{4 \cdot t}$$

Задатак 7

$$f(t) = 3 - e^{2 \cdot t}$$

Задатак 8

$$f(t) = 4 \cdot t + 2e^{5 \cdot t}$$

Задатак 9

$$f(t) = t - 1$$

Задатак 10

$$(1 + 3 \cdot t) \cdot e^{5 \cdot t}$$

Задатак 11

$$f(t) = t + 2 \cdot e^{2 \cdot t}$$

Разложите разломак

Задатак 12

$$\frac{4s+3}{s(s+1)(11s+6)}.$$

Задатак 13

$$\frac{x(x^3+11x^2-7x+9)-6}{(x^2-x)(x^2+1)}$$

Задатак 14

$$\frac{x^2+1}{(x^2+3)(x-1)}$$

Извршите Лапласове трансформације

Задатак 15

$$7 \cdot e^{2t} \cdot \cos(3 \cdot t) - 2 \cdot e^{7t} \cdot \sin(5 \cdot t)$$

Задатак 16

$$8 \cdot t^4 + 6 \cdot \sin(5 \cdot t) - 9 \cdot \cos(5 \cdot t)$$

Задатак 17

$$y(t) = t^2(3t-2) + 7 - e^{2t}$$

Задатак 18

$$3 \cdot t^3(t-1) + e^{-5t}$$

Задатак 19

$$e^{-2t} \cdot \left[\cos(2 \cdot t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) \right]$$

Задатак 20

$$-e^t \cdot (e^t + 1) + (3 + 2 \cdot t)$$

Задатак 21

$$y(t) = t^2(3t-2) + 7 - e^{2t}$$

Задатак 22

$$y(t) = 3t^3 + \sin(\sqrt{3}t) - 2e^{-5t}$$

Задатак 23

$$\mathcal{L}(e^{-t} \sin 3t)$$

Задатак 24

$$\mathcal{L}(e^{2t}(t^2 - 3t + 2))$$

Задатак 25

$$f(t) = 3 \cdot t^3 - 2 \cdot t^2 + 7$$

$$g(t) = e^{-3t} + \sin(\sqrt{2} \cdot t)$$

$$h(t) = -8 + \cos\left(\frac{t}{2}\right)$$

Задатак 26

$$f(t) = 7 \cdot e^{2t} \cdot \cos(3 \cdot t) - 2 \cdot e^{7t} \cdot \sin(5 \cdot t)$$

$$g(t) = 3 \cdot t \cdot \sin(2 \cdot t)$$

$$h(t) = (2 - t^2) \cdot e^{-5t}$$

Извршите инверзне Лапласове трансформације

Задатак 27

$$\frac{s}{s^2 + 6 \cdot s + 14}$$

Задатак 28

$$\frac{s - 3}{s^2 - 6 \cdot s + 25}$$

Задатак 29

$$\frac{1}{s^4 - 9 \cdot s^2}$$

Задатак 30

$$\frac{6}{4 \cdot s^2 + 20 \cdot s + 24}$$

Задатак 31

$$\frac{s + 2}{s^2 - 3 \cdot s - 4}$$

Задатак 32

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2 \cdot s}$$

Задатак 33

$$\frac{5}{s^2 \cdot (s + 1)^3}$$

Задатак 34

$$\frac{s + 2}{s^2 + 9}$$

Задатак 35

$$Y(s) = \frac{2s + 18}{(s^2 + 25)}$$

Задатак 36

$$Y(s) = \frac{7s}{(s^2 + 3)^2}$$

Задатак 37

$$a) \frac{1}{\frac{1}{2} \cdot s + 3} \quad b) \frac{3}{s^2 + 4} \quad c) \frac{1}{s^2 - 4} \quad d) \frac{1 + 2 \cdot s}{s^3} \quad e) \frac{1}{s^4 - 9 \cdot s^2}$$

Задатак 38

$$a) \frac{3}{(s-2)^4} \quad b) \frac{3}{s \cdot (s-2)}$$

Задатак 39

$$\frac{s}{(s^2 + 1)^2} \quad b) \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

Задатак 40

$$F(s) = \frac{7}{(s+3)^3}$$

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2 - 3s - 4}$$

Решите диференцијалну једначину

Задатак 41

$$y'' - 2 \cdot y' = 3 \cdot (t + e^{2t}) \quad y(0) = y'(0) = 0$$

Задатак 42

$$y'' - 2 \cdot y' + y = e^t \quad y(0) = 0 \text{ и } y'(0) = 0$$

Задатак 43

$$y'' - y' = 30 \cdot \cos(3 \cdot t) \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Задатак 44

$$y'' + y = 2 + 2 \cos t \quad y'(0) = 0 \text{ и } y(0) = 0.$$

Задатак 45

$$a) y'(t) - y(t) = e^{3t} \quad y(0) = 1 \quad b) y'' - 3y' + 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$$

$$c) y'' + 4y = \sin t, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad d) y'' - 2y' + 2y = 2e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

Решите систем диференцијалних једначина:

Задатак 46

$$y' + 2 \cdot z = 1$$

$$2 \cdot y - z' = 2 \cdot t$$

$$y_0 = 0 \text{ и } z_0 = 1.$$

Задатак 46

$$x' - y = 0$$

$$y' + x = 0$$

Задатак 47

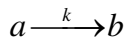
I једначина $x'' + y'' + y' - x = e^t - 2$

II једначина $2 \cdot x'' + y'' - 2x' + y = -t$

$$x(0) = y(0) = x'(0) = y'(0) = 0$$

Задатак 48

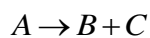
Реакција се одвија по следећем механизму:



Ако су полазне концентрације хемијских врста $a(0) = 4 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$ и $b(0) = 0 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, одредити функционалну зависност концентрације компонената од времена.

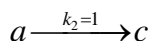
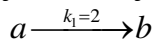
Задатак 49

Нађите зависност концентрација појединачних компоненти у реакцији од времена, за почетне услове $k = 5$, $a(0) = 2$, $b(0) = 1$ и $c(0) = 0$:



Задатак 50

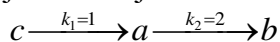
Реакција се одвија по следећем механизму:



Ако су полазне концентрације хемијских врста $a(0) = 4 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, $b(0) = 0 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$ и $c(0) = 0 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, одредити функционалну зависност концентрације компонената од времена.

Задатак 51

Реакција се одвија по следећем механизму:



Ако су полазне концентрације хемијских врста $a(0) = 0 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, $b(0) = 0 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$, $c(0) = 1 \frac{\text{mol}}{\text{dm}^3}$ одредити функционалну зависност концентрације компонената од времена.

Задатак 52

Реакција се одвија по следећем механизму:



Ако су полазне концентрације хемијских врста $A=A_0$, $B=B_0$ и $C=0$, одредити њихову функционалну зависност од температуре.

Задатак 53

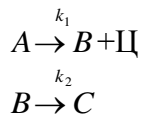
Реакција се одвија по следећем механизму:



Ако су полазне концентрације хемијских врста $A=A_0$, $B=0$ и $C=0$, одредити њихову функционалну зависност од температуре.

Задатак 54

Реакција се одвија по следећем механизму:



Ако су полазне конценрације хемијских врста $A=A_0$, $B=0$ и $C=0$, одредити њихову функционалну зависност концентрација компонената А и В од времена.

Решења

Извршите Лапласова трансформације без коришћења таблица:

Задатак 1

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\infty} 5 e^{-st} dt = -\frac{5}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \left[-\frac{5}{s} e^{-s\infty} \right] - \left[-\frac{5 e^{-s0}}{s} \right] = \frac{5}{s}$$

Задатак 2

$$\int_0^1 1 \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_1^2 -1 e^{-st} \cdot dt + \int_2^{\infty} 0 \cdot e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^1 + \frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_1^2 = \frac{1}{s} \cdot (1 - 2 \cdot e^{-s} + e^{-2s})$$

Задатак 3

$$\int_0^1 t \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_1^2 (2-t) \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_2^{\infty} 0 \cdot e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} \cdot e^{-2s} + \frac{1}{s^2} \cdot e^{-2s} - \frac{2}{s^2} \cdot e^{-s} + \frac{1}{s^2}$$

Задатак 4

$$\int_0^{t_0} t \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_{t_0}^{2t_0} (2t_0 - t) \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_{2t_0}^{\infty} 0 \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{1}{s^2} \cdot (1 + e^{-2s \cdot t_0} - 2 \cdot e^{-s \cdot t_0})$$

Задатак 5

$$\int_0^{t_0} 0 \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_{t_0}^{\infty} c \cdot e^{-st} \cdot dt = \frac{c}{s} \cdot e^{-s \cdot t_0}$$

Задатак 6

$$F(s) = \int_0^{\infty} 5e^{4t} e^{-st} dt \Rightarrow \int_0^{\infty} 5e^{t(4-s)} dt \Rightarrow \int_0^{\infty} 5e^{-t(s-4)} dt$$

Задатак 7

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} (3 - e^{2t}) \cdot e^{-st} \cdot dt = 3 \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt - \int_0^{\infty} e^{2t} \cdot e^{-st} \cdot dt = 3 \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot dt - \int_0^{\infty} e^{(2-s)t} \cdot dt = -\frac{3}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^{\infty} - \frac{1}{2-s} \cdot e^{(2-s)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= -\frac{3}{s} \cdot (e^{-s\infty} - e^{-s0}) - \frac{1}{2-s} \cdot (e^{(2-s)\infty} - e^{(2-s)0}) = \frac{3}{s} + \frac{1}{2-s} = \frac{6-2 \cdot s}{2 \cdot s - s^2} \end{aligned}$$

Задатак 8

$$F(s) = \int_0^{\infty} (4 \cdot t + 2 \cdot e^{5t}) \cdot e^{-st} \cdot dt = 4 \cdot \int_0^{\infty} t \cdot e^{-st} \cdot dt + 2 \cdot \int_0^{\infty} e^{(5-s)t} \cdot dt$$

$$\begin{aligned} u &= t & v &= -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \\ du &= dt & dv &= e^{-st} \cdot dt \end{aligned}$$

$$F(s) = -4 \cdot \frac{1}{s} \cdot t \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + 4 \cdot \int_0^\infty \frac{1}{s} \cdot e^{-st} \cdot dt + 2 \cdot \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s)t} \Big|_0^\infty = -4 \cdot \frac{1}{s} \cdot (\infty \cdot e^{-s \cdot \infty} - 0 \cdot e^{-s \cdot 0}) - 4 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + 2 \cdot \frac{1}{5-s} \cdot (e^{(5-s) \cdot \infty} - e^{(5-s) \cdot 0}) = -4 \cdot \frac{1}{s^2} \cdot (-e^{-st}) - 2 \cdot \frac{1}{5-s} = 4 \cdot \frac{1}{s^2} - 2 \cdot \frac{1}{5-s} = \frac{-2 \cdot s^2 - 4 \cdot s + 20}{5 \cdot s^2 - s^3}$$

Задатак 9

$$F(s) = \int_0^\infty (t-1) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} \cdot dt - \int_0^\infty e^{-st} \cdot dt$$

$$u = t \quad v = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st}$$

$$du = dt \quad dv = e^{-st} \cdot dt$$

$$F(s) = -\frac{1}{s} \cdot t \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{1}{s} \cdot e^{-st} \cdot dt - \int_0^\infty e^{-st} \cdot dt = -\frac{1}{s} \cdot (\infty \cdot e^{-s \cdot \infty} - 0 \cdot e^{-s \cdot 0}) - \frac{1}{s^2} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{1}{s} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty = -\frac{1}{s^2} \cdot (-e^{-st}) + \frac{1}{s} \cdot (-e^{-st}) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}$$

Задатак 10

$$\int_0^\infty (1+3 \cdot t) \cdot e^{5t} \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^\infty e^{5t} \cdot e^{-st} \cdot dt + \int_0^\infty 3 \cdot t \cdot e^{5t} \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^\infty e^{(5-s)t} \cdot dt + 3 \cdot \int_0^\infty t \cdot e^{(5-s)t} \cdot dt$$

$$u = t \quad dv = e^{(5-s)t} \cdot dt$$

$$du = dt \quad v = \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s)t}$$

$$\frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s)t} \Big|_0^\infty + 3 \cdot \left(t \cdot \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s)t} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s)t} \cdot dt \right) = \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s) \cdot \infty} - \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s) \cdot 0} + 3 \cdot \left(\infty \cdot \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s) \cdot \infty} - 0 \cdot \frac{1}{5-s} \cdot e^{(5-s) \cdot 0} - \frac{1}{(5-s)^2} \cdot e^{(5-s)t} \Big|_0^\infty \right) = -\frac{1}{5-s} + 3 \cdot \left(-\frac{1}{(5-s)^2} \cdot e^{(5-s) \cdot \infty} + \frac{1}{(5-s)^2} \cdot e^{(5-s) \cdot 0} \right) = -\frac{1}{5-s} + 3 \cdot \frac{1}{(5-s)^2} = \frac{s-2}{(5-s)^2}$$

Задатак 11

$$F(s) = \int_0^\infty (t+2 \cdot e^{2t}) \cdot e^{-st} \cdot dt = \int_0^\infty t \cdot e^{-st} \cdot dt + 2 \cdot \int_0^\infty e^{2t} \cdot e^{-st} \cdot dt$$

$$\text{смена } u = t \quad du = dt$$

$$dv = e^{-st} dt \quad v = -\frac{1}{s} \cdot e^{-st}$$

$$F(s) = t \cdot \left(-\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \right) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} \cdot e^{-st} \cdot dt + 2 \cdot \int_0^\infty e^{(2-s)t} \cdot dt = -\frac{1}{s^2} \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + \frac{2}{2-s} \cdot e^{(2-s)t} \Big|_0^\infty = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{2-s}$$

Разложите разломак

Задатак 12

$$\frac{1}{2s} - \frac{1}{5(s+1)} - \frac{33}{10} \frac{1}{11s+6}$$

Задатак 13

$$\frac{x+3}{x-1} + \frac{2x}{x^2+1} + \frac{6}{x}$$

Задатак 14

$$\frac{1}{2} \left(\frac{x+1}{x^2+3} + \frac{1}{x-1} \right)$$

Извршите Лапласове трансформације

Задатак 15

$$\frac{3}{s^2} - \frac{3}{s} + \frac{e^{-1}}{s+1}$$

Задатак 16

$$\frac{192}{s^5} + \frac{30-9 \cdot s}{s^2+25}$$

Задатак 17

$$Y(s) = \frac{18}{s^4} - \frac{4}{s^3} + \frac{7}{s} - \frac{1}{s-2}$$

Задатак 18

$$f(t) = 3 \cdot t^3 (t-1) + e^{-5t} = 3 \cdot t^4 - 3 \cdot t^3 + e^{-5t}$$

$$F(s) = 3 \cdot \frac{4!}{s^5} - 3 \cdot \frac{3!}{s^4} + \frac{1}{s+5} = \frac{72}{s^5} - \frac{18}{s^4} + \frac{1}{s+5}$$

Задатак 19

$$e^{-2t} \cdot \left[\cos(2 \cdot t) + \frac{5}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) \right] = e^{-2t} \cdot \cos(2 \cdot t) + e^{-2t} \cdot \frac{5}{2} \cdot \sin(2 \cdot t) = \frac{s+2}{(s+2)^2+4} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{(s+2)^2+4}$$

Задатак 20

$$\frac{-1}{s-1} + \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s^2} + \frac{3}{s}$$

Задатак 21

$$\frac{18}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{7}{s} - \frac{1}{s-2}$$

Задатак 22

$$\frac{18}{s^4} + \frac{\sqrt{3}}{s^2+3} - \frac{2}{s+5}$$

Задатак 23

$$\frac{3}{9+(1+s)^2}$$

Задатак 24

$$\frac{2}{(-2+s)^3} - \frac{3}{(-2+s)^2} + \frac{2}{(-2+s)}$$

Задатак 25

$$F(s) = \frac{18}{s^4} - \frac{4}{s^3} + \frac{7}{s}; \quad G(s) = \frac{1}{e^3 \cdot s^2} + \frac{\sqrt{2}}{2+s^2}; \quad H(s) = -\frac{8}{s} + \frac{s}{\frac{1}{4}+s^2}$$

Задатак 26

$$F(s) = \frac{7 \cdot (-2+s)}{9+(-2+s)^2} - \frac{140 \cdot e \cdot s}{(25+s^2)^2} ; G(s) = \frac{12s}{(4+s^2)^2} ; H(s) = -5 \cdot e \cdot \left(\frac{-6}{s^4} + \frac{2}{s^2} \right)$$

Извршите инверзне Лапласове трансформације

Задатак 27

$$\frac{1}{5} \cdot e^{-3t} \cdot \left(5 \cdot \cos(\sqrt{5} \cdot t) - 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \sin(\sqrt{5} \cdot t) \right)$$

Задатак 28

$$\frac{s-3}{s^2-6 \cdot s+25} = \frac{s-3}{(s-3)^2+16} = \frac{s-3}{(s-3)^2+4^2} \stackrel{L.P.}{=} e^{3t} \cdot \cos(4 \cdot t)$$

Задатак 29

$$\frac{1}{s^4-9 \cdot s^2} = \frac{1}{s^2 \cdot (s^2-9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s+3}$$

$$\frac{1}{s^2 \cdot (s^2-9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s+3} \Bigg/ s^2 \cdot (s^2-9)$$

$$1 = A \cdot s \cdot (s^2-9) + B \cdot (s^2-9) + C \cdot s^2 \cdot (s+3) + D \cdot s^2 \cdot (s-3)$$

$$1 = A \cdot (s^3-9 \cdot s) + B \cdot (s^2-9) + C \cdot (s^3+3 \cdot s^2) + D \cdot s^2 \cdot (s^3-3 \cdot s^2)$$

$$s^3: A+C+D=0$$

$$s^2: B+3 \cdot C-3 \cdot D=0$$

$$s: -9 \cdot A=0$$

$$const: -9 \cdot B=1$$

$$A=0 \quad B=-\frac{1}{9} \quad C=\frac{1}{54} \quad D=-\frac{1}{54}$$

$$\frac{1}{s^4-9 \cdot s^2} = \frac{1}{s^2 \cdot (s^2-9)} = -\frac{1}{9} \cdot \frac{B}{s^2} + \frac{1}{54} \cdot \frac{C}{s-3} - \frac{1}{54} \cdot \frac{D}{s+3}$$

$$-\frac{1}{9} \cdot t + \frac{1}{54} \cdot e^{3t} - \frac{1}{54} \cdot e^{-3t}$$

Задатак 30

$$\frac{6}{4 \cdot s^2+20 \cdot s+24} = \frac{6}{4 \cdot (s^2+5 \cdot s+6)} = \frac{3}{2 \cdot (s^2+2 \cdot s+3 \cdot s+6)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s \cdot (s+2)+3 \cdot (s+2)} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)}$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(s+2) \cdot (s+3)} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+3} \right) \Bigg/ (s+2) \cdot (s+3)$$

$$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot (A \cdot (s+3) + B \cdot (s+2))$$

$$s^1: A+B=0$$

$$s^0: 3 \cdot A+2 \cdot B=1$$

$$A=1 \quad B=-1$$

$$\frac{6}{4 \cdot s^2+20 \cdot s+24} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3} \right) \stackrel{L.P.}{=} \frac{3}{2} \cdot (e^{-2t} - e^{-3t})$$

Задатак 31

$$\frac{s+2}{s^2-3s-4} = \frac{s+2}{(s+1)(s-4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-4} \Big/ (s+1)(s-4)$$

$$s+2 = A(s-4) + B(s+1)$$

$$s^1: A+B=1$$

$$s^0: -4A+B=2$$

$$A = -\frac{1}{5} \quad B = \frac{6}{5}$$

$$f(t) = -\frac{1}{5} \cdot e^{-t} + \frac{6}{5} \cdot e^{4t}$$

Задатак 32

$$\frac{s+1}{s^2+2s} = \frac{s+1}{(s+1)^2-1} = e^{-t} \cdot \cosh t$$

Задатак 33

$$\frac{5}{s^2 \cdot (s+1)^3} = \frac{5}{s^2} + \frac{-15}{s} + \frac{5}{(s+1)^3} + \frac{10}{(s+1)^2} + \frac{15}{s+1} = 5 \cdot t - 15 + 5 \cdot t^2 \cdot e^{-t} + 10 \cdot t \cdot e^{-t} + 15 \cdot e^{-t}$$

Задатак 34

$$\frac{s+2}{s^2+9} = \frac{s}{s^2+9} + \frac{2}{s^2+9} = \cos 3 \cdot t + \frac{2}{3} \cdot \cos 3 \cdot t$$

Задатак 35

$$2 \cdot \cos(5 \cdot t) + \frac{18}{5} \cdot \sin(5 \cdot t)$$

Задатак 36

$$\frac{7\sqrt{3}}{6} t \sin(\sqrt{3}t)$$

Задатак 37

а) $2 \cdot e^{-6t}$; б) $3/2 \sin[2t]$; в) $\frac{1}{4} \cdot e^{-2t} \cdot (-1 + e^{4t})$; г) $2 \cdot t + \frac{t^2}{2}$; д) $-1/54 \cdot e^{-3t} + e^{3t}/54 - t/9$

Задатак 38

а) $\frac{1}{2} \cdot e^{2t} \cdot t^3$; б) $1/2 \cdot (-1 + e^{2t})$

Задатак 39

а) $1/2 t \cdot \sin[t]$; б) $1/2(-t \cdot \cos[t] + \sin[t])$

Задатак 40

а) $7/2 \cdot e^{-3t} \cdot t^2$; б) $1/5 \cdot e^{-t}(-1 + 6 \cdot e^{5t})$

Решите диференцијалну једначину

Задатак 41

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0)^0 - y'(0)^0 - 2 \cdot s \cdot Y(s) + 2 \cdot y(0)^0 = 3 \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$Y(s) \cdot (s^2 - 2 \cdot s) = 3 \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \cdot \frac{1}{s-2}$$

$$Y(s) \cdot s \cdot (s-2) = 3 \cdot \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} \right]$$

$$Y(s) = \frac{3}{s \cdot (s-2)} \cdot \left[\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s-2} \right]$$

$$Y(s) = 3 \cdot \left[\frac{1}{s^3(s-2)} + \frac{1}{s \cdot (s-2)^2} \right]$$

$$\frac{1}{s^3 \cdot (s-2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{D}{(s-2)} \Big/ \cdot s^3 \cdot (s-2)$$

$$1 = A \cdot s^2 \cdot (s-2) + B \cdot s \cdot (s-2) + C \cdot (s-2) + D \cdot s^3$$

$$1 = s^3 \cdot (A+D) + s^2(B-2 \cdot A) + s \cdot (C-2 \cdot B) - 2 \cdot C$$

$$s^3 : A+D=0$$

$$s^2 : B-2 \cdot A=0$$

$$s^1 : C-2 \cdot B=0$$

$$s^0 : -2 \cdot C=1$$

$$A = -\frac{1}{8} \quad B = -\frac{1}{4} \quad C = -\frac{1}{2} \quad D = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{s^3 \cdot (s-2)} = -\frac{1}{8} \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{(s-2)}$$

$$\frac{1}{s \cdot (s-2)^2} = \frac{E}{s} + \frac{F}{s-2} + \frac{G}{(s-2)^2} \Big/ \cdot s \cdot (s-2)^2$$

$$1 = E \cdot (s-2)^2 + F \cdot s \cdot (s-2) + G \cdot s$$

$$1 = s^2(E+F) + s \cdot (-4 \cdot E - 2 \cdot F + G) + 4 \cdot E$$

$$s^2 : E+F=0$$

$$s^1 : -4 \cdot E - 2 \cdot F + G=0$$

$$s^0 : 4 \cdot E=1$$

$$E = \frac{1}{4} \quad F = -\frac{1}{4} \quad G = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{s \cdot (s-2)^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s-2)^2}$$

$$Y(s) = 3 \cdot \left[-\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^3} + \frac{1}{8} \frac{1}{(s-2)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-2)^2} \right]$$

$$y(t) = 3 \cdot \left[-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot t - \frac{1}{4} \cdot t^2 + \frac{1}{8} e^{2t} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{2t} + \frac{1}{2} \cdot t \cdot e^{2t} \right]$$

Задатак 42

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0)^0 - y'(0)^0 - 2 \cdot (s \cdot Y(s) - y(0)^0) + Y(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^3} = \frac{2}{(s-1)^3} \cdot \frac{1}{2}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^t$$

Задатак 43

$$s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0) - y'(0) - s \cdot Y(s) + y(0) = 30 \cdot \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$s \cdot (s-1) \cdot Y(s) = 30 \cdot \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s \cdot (s-1)} 30 \cdot \frac{s}{s^2 + 9}$$

$$\frac{30}{(s-1) \cdot (s^2 + 9)} = \frac{A \cdot s + B}{s^2 + 9} + \frac{C}{s-1} \Big/ (s-1) \cdot (s^2 + 9)$$

$$30 = (A \cdot s + B) \cdot (s-1) + C \cdot (s^2 + 9)$$

$$30 = A \cdot s^2 + C \cdot s^2 - A \cdot s + B \cdot s - B + 9 \cdot C$$

$$s^2: \quad A + C = 0$$

$$s^1: \quad -A + B = 0$$

$$s^0: \quad -B + 9 \cdot C = 0$$

$$A = -3 \quad B = -3 \quad C = 3$$

$$Y(s) = \frac{3}{s-1} - \frac{3 \cdot s + 3}{s^2 + 9} = \frac{3}{s-1} - \frac{3 \cdot s}{s^2 + 9} - \frac{3}{s^2 + 9}$$

$$y(t) = 3 \cdot e^t - 3 \cdot \cos(3 \cdot t) - \sin(3 \cdot t)$$

Задатак 44

$$y(t) = 2 - 2 \cdot \cos t + t \cdot \sin t$$

Задатак 45

a) $\frac{3 \cdot e + s^2}{(-1+s)s^2}$; $-3 \cdot e + e^t \cdot (1+3 \cdot e) - 3 \cdot e \cdot t$; б) $1/(-1+s)$; e^t ; ц) $\frac{(1+s+s^3)}{(1+s^2) \cdot (4+s^2)}$;
 $1/6 \cdot (6 \cdot \cos[2 \cdot t] + 2 \cdot \sin[t] - \sin[2 \cdot t])$

Решите систем диференцијалних једначина:

Задатак 46

$$I \text{ једначина} \quad \frac{dy}{dt} + 2 \cdot z = 1 \quad s \cdot Y(s) - y(0) + 2 \cdot Z(s) = \frac{1}{s}$$

$$II \text{ једначина} \quad 2 \cdot y - \frac{dz}{dt} = 2 \cdot t \quad 2 \cdot Y(s) - s \cdot Z(s) + z(0) = 2 \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$I \text{ једначина} \quad s \cdot Y(s) + 2 \cdot Z(s) = \frac{1}{s} \Big/ \cdot 2$$

$$II \text{ једначина} \quad 2 \cdot Y(s) - s \cdot Z(s) + 1 = 2 \cdot \frac{1}{s^2} \Big/ \cdot s$$

$$I \text{ једначина} \quad 2 \cdot s \cdot Y(s) + 4 \cdot Z(s) = \frac{2}{s}$$

$$II \text{ једначина} \quad 2 \cdot s \cdot Y(s) - s^2 \cdot Z(s) = -s + \frac{2}{s}$$

$$I \text{ једначина} \quad 2 \cdot s \cdot Y(s) + 4 \cdot Z(s) = \frac{2}{s}$$

I – II једначина $s^2 \cdot Z(s) + 4 \cdot Z(s) = s$

I једначина $2 \cdot s \cdot Y(s) + 4 \cdot Z(s) = \frac{2}{s}$

I – II једначина $Z(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$

I једначина $2 \cdot s \cdot Y(s) + 4 \cdot \frac{s}{s^2 + 4} = \frac{2}{s}$

I – II једначина $Z(s) = \frac{s}{s^2 + 4}$

I једначина $Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s^2 + 4}$ $y(t) = t - \sin(2 \cdot t)$

I – II једначина $z(t) = \cos(2 \cdot t)$

Задатак 47

Након извршених Лапласових трансформација над диференцијалним једначинама добијају се две алгебарске једначине:

I једначина $x'' + y'' + y' - x = e^t - 2$

II једначина $2 \cdot x'' + y'' - 2x' + y = -t$

I једначина $s^2 \cdot X(s) - s^2 \cdot Y(s) + s \cdot Y(s) - X(s) = \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s}$

II једначина $2 \cdot s^2 \cdot X(s) - s^2 \cdot Y(s) + 2 \cdot s \cdot X(s) - Y(s) = -\frac{1}{s^2}$

I једначина $X(s) \cdot (s-1) \cdot (s+1) = Y(s) \cdot s \cdot (s-1) + \frac{1}{s-1} - \frac{2}{s}$

II једначина $X(s) \cdot 2 \cdot s \cdot (s-1) = Y(s) \cdot (s+1) \cdot (s-1) - \frac{1}{s^2}$

I једначина $X(s) \cdot (s-1) = \frac{Y(s) \cdot s \cdot (s-1)}{(s+1)} + \frac{1}{(s-1) \cdot (s+1)} - \frac{2}{s \cdot (s+1)}$

II једначина $2 \cdot s \cdot \left[\frac{Y(s) \cdot s \cdot (s-1)}{(s+1)} + \frac{1}{(s-1) \cdot (s+1)} - \frac{2}{s \cdot (s+1)} \right] = Y(s) \cdot (s+1) \cdot (s-1) - \frac{1}{s^2}$

Сређивањем 2. једначине добиће се $Y(s)$

$$\frac{2 \cdot s}{(s-1) \cdot (s+1)} - \frac{4 \cdot s}{s \cdot (s+1)} + \frac{1}{s^2} 2 = Y(s) \cdot \left[(s+1) \cdot (s-1) - \frac{2 \cdot s^2 \cdot (s-1)}{(s+1)} \right]$$

Најмањи заједнички за леву страну је $s^2 \cdot (s-1) \cdot (s+1)$, а за десну $(s+1)$.

$$\frac{2 \cdot s^3 - 4 \cdot s^2 \cdot (s-1) + s^2 - 1}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s+1)} = Y(s) \cdot \frac{(s+1)^2 \cdot (s-1) - 2 \cdot s^2 \cdot (s-1)}{(s+1) \cdot (s-1) \cdot (s+1)} \cdot \frac{1}{(s-1)}$$

$$\frac{2 \cdot s^3 - 4 \cdot s^3 + 4 \cdot s^2 + s^2 - 1}{s^2 \cdot (s-1)^2} = Y(s) \cdot \left[(s+1)^2 - 2 \cdot s^2 \right]$$

$$\frac{-2 \cdot s^3 + 4 \cdot s^2 - 1 + s^2}{s^2 \cdot (s-1)^2} = Y(s) \cdot [s^2 + 2 \cdot s + 1 - 2 \cdot s^2]$$

$$\frac{-s^2(1-2 \cdot s) - 1 \cdot (1-2 \cdot s) \cdot (1+2 \cdot s)}{s^2 \cdot (s-1)^2} = Y(s) \cdot [-s^2 + 2 \cdot s + 1]$$

$$\frac{(1-2 \cdot s) \cdot (s^2 - 1 - 2 \cdot s)}{s^2 \cdot (s-1)^2} = Y(s) \cdot [-s^2 + 2 \cdot s + 1]$$

$$Y(s) = \frac{(1-2 \cdot s) \cdot \cancel{(s^2 - 1 - 2 \cdot s)}}{s^2 \cdot (s-1)^2} \cdot \frac{1}{-\cancel{[s^2 - 2 \cdot s - 1]}}$$

$$Y(s) = \frac{(2 \cdot s - 1)}{s^2 \cdot (s-1)^2}$$

$$\frac{(2 \cdot s - 1)}{s^2 \cdot (s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} \Bigg/ s^2 \cdot (s-1)^2$$

$$(2 \cdot s - 1) = A \cdot s \cdot (s-1)^2 + B \cdot (s-1)^2 + C \cdot s^2 \cdot (s-1) + D \cdot s^2$$

$$(2 \cdot s - 1) = A \cdot (s^3 - 2 \cdot s^2 + s) + B \cdot (s^2 - 2 \cdot s + 1) + C \cdot (s^3 - s^2) + D \cdot s^2$$

$$x^3 \quad A + C = 0$$

$$x^2 \quad -2 \cdot A + B - C + D = 0$$

$$x^1 \quad A - 2 \cdot B = 2$$

$$x^0 \quad B = -1$$

$$A = 0 \quad B = -1 \quad C = 0 \quad D = 1$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Након извршене инверзне Лапласове трансформације, добија се:

$$y(t) = -t + t \cdot e^t$$

У једначину

$$X(s) \cdot (s-1) = \frac{Y(s) \cdot s \cdot (s-1)}{(s+1)} + \frac{1}{(s-1) \cdot (s+1)} - \frac{2}{s \cdot (s+1)}$$

заменимо вредност за $Y(s)$:

$$X(s) \cdot (s-1) = \frac{(2 \cdot s - 1) \cdot \cancel{s} \cdot \cancel{(s-1)}}{s^2 \cdot (s-1)^2} \cdot \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s-1) \cdot (s+1)} - \frac{2}{s \cdot (s+1)}$$

$$X(s) = \frac{\cancel{2 \cdot s} - 1 + s - \cancel{2 \cdot s} + 2}{s \cdot (s-1)^2 \cdot (s+1)} = \frac{\cancel{1} + \cancel{s}}{s \cdot (s-1)^2 \cdot \cancel{(s+1)}} = \frac{1}{s \cdot (s-1)^2}$$

$$\frac{1}{s \cdot (s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} \Bigg/ s \cdot (s-1)^2$$

$$1 = A \cdot (s^2 - 2 \cdot s + 1) + B \cdot (s^2 - s) + C \cdot s$$

$$x^2 \quad A + B = 0$$

$$x^1 \quad -2 \cdot A - B + C = 0$$

$$x^0 \quad A = 1$$

$$A = 1 \quad B = -1 \quad C = 1$$

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Након извршене инверзне Лапласове трансформације, добија се:

$$x(t) = 1 - e^t + t \cdot e^t$$

Задатак 48

I једначина $\frac{da}{dt} = -k \cdot a$

II једначина $\frac{db}{dt} = k \cdot a$

Након Лапласове трансформације добијамо:

I једначина $s \cdot A(s) - a(0) = -k \cdot A(s)$

II једначина $s \cdot B(s) - b(0) = k \cdot A(s)$

I једначина $A(s) = \frac{4}{s+k}$

II једначина $B(s) = \frac{k \cdot A(s)}{s}$

I једначина $a(t) = 4 \cdot e^{-kt}$

II једначина $B(s) = \frac{k \cdot 4}{s \cdot (s+k)}$

II једначина $\frac{k \cdot 4}{s \cdot (s+k)} = k \cdot 4 \cdot \left[\frac{M}{s} + \frac{N}{s+k} \right] / s \cdot (s+k)$

$$1 = M \cdot (s+k) + N \cdot s$$

$$s: 0 = M + N$$

$$s^0: 1 = M \cdot k$$

$$M = \frac{1}{k} \quad N = -\frac{1}{k}$$

$$B(s) = \frac{k \cdot 4}{s \cdot (s+k)} = 4 \cdot k \cdot \left[\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{s} - \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{s+k} \right]$$

$$b(t) = 4 \cdot [1 - e^{-k \cdot t}]$$

Задатак 49

$$s \cdot X(s) - 1 - Y(s) = 0$$

$$s \cdot Y(s) + X(s) = 0$$

$$s \cdot X(s) - 1 - Y(s) = 0$$

$$X(s) = -s \cdot Y(s)$$

$$Y(s) = -\frac{1}{s^2 + 1}$$

$$X(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

$$y(t) = -\sin t = \sin(-t)$$

$$x(t) = \cos t$$

$$\frac{da(t)}{dt} = -k \cdot a(t)$$

$$s \cdot A(s) - a(0) = -k \cdot A(s)$$

$$s \cdot A(s) - 2 = -5 \cdot A(s)$$

$$s \cdot A(s) + 5 \cdot A(s) = 2$$

$$(s + 5) \cdot A(s) = 2$$

$$A(s) = \frac{2}{s + 5}$$

$$a(t) = 2 \cdot e^{-5t}$$

$$\frac{db(t)}{dt} = k \cdot a(t)$$

$$s \cdot B(s) - b(0) = k \cdot A(s)$$

$$s \cdot B(s) - 1 = 5 \cdot \frac{2}{s + 5}$$

$$s \cdot B(s) = 1 + \frac{10}{s + 5}$$

$$B(s) = \frac{1}{s} + \frac{10}{s \cdot (s + 5)} = \frac{1}{s} + 2 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5} \right)$$

$$b(t) = 3 - 2 \cdot e^{-5t}$$

$$\frac{dc(t)}{dt} = +k \cdot a(t)$$

$$s \cdot C(s) - c(0) = +k \cdot A(s)$$

$$s \cdot C(s) = +5 \cdot \frac{2}{s + 5}$$

$$C(s) = +\frac{10}{s \cdot (s + 5)} = \frac{1}{s} + 2 \cdot \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 5} \right)$$

$$c(t) = 2 \cdot (1 - e^{-5t})$$

Задатак 50

$$I \text{ једначина } \frac{da}{dt} = -k_1 \cdot a - k_2 \cdot a$$

$$s \cdot A(s) - a(0) = -k_1 \cdot A(s) - k_2 \cdot A(s)$$

$$II \text{ једначина } \frac{db}{dt} = k_1 \cdot a$$

$$s \cdot B(s) - b(0) = k_1 \cdot A(s)$$

$$III \text{ једначина } \frac{dc}{dt} = k_2 \cdot a$$

$$s \cdot C(s) - c(0) = k_2 \cdot A(s)$$

$$I \text{ једначина } s \cdot A(s) - 4 = -2 \cdot A(s) - 1 \cdot A(s)$$

$$II \text{ једначина } s \cdot B(s) = k_1 \cdot A(s)$$

$$III \text{ једначина } s \cdot C(s) = k_2 \cdot A(s)$$

$$I \text{ једначина } A(s) = \frac{4}{(s+3)}$$

$$II \text{ једначина } B(s) = \frac{2}{s} A(s) = \frac{8}{s \cdot (s+3)} = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{(s+3)}$$

$$III \text{ једначина } C(s) = \frac{1}{s} \cdot A(s) = \frac{4}{s \cdot (s+3)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{s} - \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{(s+3)}$$

$$I \text{ једначина } a(t) = 4 \cdot e^{-3t}$$

$$II \text{ једначина } b(t) = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} \cdot e^{-3t}$$

$$III \text{ једначина } c(t) = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \cdot e^{-3t}$$

Задатак 51

$$I \text{ једначина } \frac{dc}{dt} = -k_1 \cdot c$$

$$II \text{ једначина } \frac{da}{dt} = k_1 \cdot c - k_2 \cdot a$$

$$III \text{ једначина } \frac{db}{dt} = -k_1 \cdot a$$

Након Лапласове трансформације добијамо:

$$I \text{ једначина } s \cdot C(s) - \cancel{c(0)}^1 = -k_1 \cdot C(s) = -C(s)$$

$$II \text{ једначина } s \cdot A(s) - \cancel{a(0)}^0 = k_1 \cdot C(s) - k_2 \cdot A(s) = C(s) - 2 \cdot A(s)$$

$$III \text{ једначина } s \cdot B(s) - \cancel{b(0)}^0 = k_2 \cdot A(s)$$

$$I \text{ једначина } C(s) = \frac{1}{s + k_1}$$

$$II \text{ једначина } A(s) = \frac{1}{(s+k_1) \cdot (s+k_2)} = \frac{1}{(s+1) \cdot (s+2)}$$

$$III \text{ једначина } B(s) = \frac{k_1 \cdot k_2}{s \cdot (s+k_1) \cdot (s+k_2)} = \frac{2}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2)}$$

$$B(s) = \frac{k_2 \cdot k_1}{s \cdot (s+k_1) \cdot (s+k_2)} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}$$

$$a(t) = e^{-t} - e^{-2t} \quad b(t) = 1 - 2 \cdot e^{-t} + e^{-2t} \quad c(t) = e^{-t}$$

Задатак 52

$$A(\tau) = A_0 e^{-k_1 \tau} \quad B(\tau) = B_0 e^{-k_2 \tau} \quad C(\tau) = A_0 (1 - e^{-k_1 \tau}) + B_0 (1 - e^{-k_2 \tau})$$

Задатак 53

$$A(\tau) = \frac{A_0}{k_1 + k_2} [k_2 + k_1 e^{-(k_1 + k_2) \tau}] \quad B(\tau) = \frac{A_0 k_1}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1 + k_2) \tau})$$

Задатак 54

$$a(t) = A_0 e^{-k_1 t} \quad b(t) = \frac{A_0 k_1}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t})$$