Средња вредност опсервабле у датом стању

Да би се потврдила предвиђања четвртог постулата, потребно је извести мерење на ансамблу у стању $|\psi\rangle$.

Ако су предвиђања тачна, тада ће се за $N \to \infty$, удео $N(a_n)/N$ добијања исхода a_n поклопити са теоријски предвиђеном вероватноћом догађаја $P(a_n)$.

Средња вредност опсервабле $\hat{A}$ у стању $|\psi\rangle$, у ознаци $\langle \hat{A} \rangle_\psi$ или $\langle \hat{A} \rangle$, се дефинише као средња вредност појединачних исхода мерења посматране физичке величине на ансамблу у стању $|\psi\rangle$.

Нека је спектар $\hat{A}$ дискретан и нека се мерењем на ансамблу од N објеката, својствена вредност a_n добила $N(a_n)$ пута. Тада важи:

$$\frac{N(a_n)}{N} \xrightarrow[N\to\infty]{} P(a_n)$$

и $\sum_n N(a_n) = N$.

Средња вредност резултата мерења ће бити:

$$\frac{\sum_n a_n N(a_n)}{N}$$

Када $N \to \infty$, ова средња вредност постаје једнака:

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \sum_n a_n P(a_n)$$

Ако у израз заменимо вероватноћу $P(a_n)$, добија се:

$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \sum_n a_n \sum_{i=1}^{g_n} \langle \psi | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle$, и ако заменимо $a_n |u_n^i\rangle = \hat{A} |u_n^i\rangle$, следи

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} \langle \psi | \hat{A} | u_n^i \rangle \langle u_n^i | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} \left[\sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle \langle u_n^i| \right] |\psi\rangle = \langle \psi | \hat{A}\hat{I} | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle .$$

Према томе, формула за средњу вредност опсервабле $\hat{A}$ када је систем у стању $|\psi\rangle$ је:

$$\langle \hat{A} \rangle_\psi = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

За случај када је спектар $\hat{A}$ континуалан и недегенерисан добија се сасвим исти израз (проверите). Тада је $dN(\alpha)$ број елементарних догађаја са резултатом између α и $\alpha + d\alpha$, а $\langle \hat{A} \rangle_\psi = \int \alpha dP(\alpha)$.

Ако кет $|\psi\rangle$ није нормиран, формула постаје: $\langle A \rangle_\psi = \dfrac{\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$.

Дисперзија резултата мерења

Потребно је увести величину која ће окарактерисати дисперзију резултата око средње вредности.

Ако бисмо узели средњу вредност разлика између измерене величине и $\langle \hat{A} \rangle$, тј. $\langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \rangle$, тј. средњу вредност одступања величине од њене средње вредности, очигледно је да би она била једнака нули.

Услед тога узимамо средњу вредност од квадрата девијација, $\left\langle \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \right\rangle$, као меру дисперзије. Ради се о величини која се зове **варијанса**. На пример, за комплетну популацију, варијанса је једнака $\sigma^2 = \dfrac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n}$.

Према дефиницији, корен из варијансе, односно, позитивни квадратни корен из средње квадратне девијације је **неодређеност** (несигурност, енгл. *uncertanty*) или **стандардна девијација** ΔA:

$$\Delta A = \sqrt{\left\langle \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \right\rangle} = \sqrt{\langle \psi | \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 | \psi \rangle}$$

$\langle \psi | \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 | \psi \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle^2 + \langle \hat{A} \rangle^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$, следи:

$$\Delta A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

Другим речима, квадрат неодређености једнак је разлици средње вредности квадрата опсервабле и квадрата средње вредности опсервабле.

Одсутност флуктуација и проблем својствених вредности

Када је флуктуација статистичке расподеле (дисперзија резултата мерења) око средње вредности $\langle \hat{A} \rangle$ једнака нули, тада **нема флуктуација** и са сигурношћу се може тврдити да $\hat{A}$ има тачно дефинисану вредност која је једнака $\langle \hat{A} \rangle$.

Другим речима, исход мерења на свих N еквивалентних објеката ансамбла је само једна вредност и нема дисперзије резултата. **Оштра вредност** опсервабле постоји ако и само ако је неодређеност (несигурност) нула.

Када је стање непосредно пре мерења својствено стање оператора $\hat{A}$, онда је дисперзија $\Delta A = 0$. То можемо проверити користећи дефиницију:

$$\Delta A = \sqrt{\langle u_n^i | \hat{A}^2 | u_n^i \rangle - \langle u_n^i | \hat{A} | u_n^i \rangle^2} = \sqrt{a_n^{\,2} - a_n^{\,2}} = 0\,,$$

где је $|u_n^i\rangle$ својствено стање оператора $\hat{A}$ које одговара својственој вредности a_n.

Закључак је следећи: физичка величина A има са сигурношћу (са вероватноћом једнаком 1) тачно дефинисану вредност ако и само ако је динамичко стање физичког система репрезентовано својственом функцијом ермитског оператора придруженог величини A, а вредност те величине је својствена вредност a_n оператора $\hat{A}$.

Хајзенбергове релације неодређености.

Прво ћемо извести *општу* релацију неодређености за два оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Нека су $\langle \hat{A} \rangle$ и $\langle \hat{B} \rangle$ очекиване (средње) вредности два ермитска оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ у односу на нормирани вектор стања $|\psi\rangle$:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle, \qquad \langle \hat{B} \rangle = \langle \psi | \hat{B} | \psi \rangle$$

Уведимо сад операторе (који су такође ермитски)

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \qquad \Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle$$

и одредимо њихове квадрате:

$$(\Delta\hat{A})^2 = \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle\right)\left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle\right) = \hat{A}^2 - \hat{A}\langle \hat{A} \rangle - \langle \hat{A} \rangle \hat{A} + \langle \hat{A} \rangle^2 = \hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2$$

$$(\Delta\hat{B})^2 = \hat{B}^2 - 2\hat{B}\langle \hat{B} \rangle + \langle \hat{B} \rangle^2 .$$

Средње вредности квадрата одступања $\Delta\hat{A}$ и $\Delta\hat{B}$ када је систем у стању $|\psi\rangle$ су:

$$\langle \psi | (\Delta\hat{A})^2 | \psi \rangle = \langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle = \langle \psi | \hat{A}^2 - 2\hat{A}\langle \hat{A} \rangle + \langle \hat{A} \rangle^2 | \psi \rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - 2\langle \hat{A} \rangle^2 + \langle \hat{A} \rangle^2 = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2$$

$\langle \psi | (\Delta\hat{B})^2 | \psi \rangle = \langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle = \langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2$. Ово смо већ извели код средње вредности.

Неодређеност (или дисперзија резултата мерења) је корен из те величине:

$$\Delta A = \sqrt{\langle \psi | (\Delta\hat{A})^2 | \psi \rangle} = \sqrt{\langle (\Delta\hat{A})^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2}$$

$$\Delta B = \sqrt{\langle \psi | (\Delta\hat{B})^2 | \psi \rangle} = \sqrt{\langle (\Delta\hat{B})^2 \rangle} = \sqrt{\langle \hat{B}^2 \rangle - \langle \hat{B} \rangle^2}$$

Дефинишимо сада кетове:

$$|\chi\rangle = \Delta\hat{A}|\psi\rangle, \qquad |\phi\rangle = \Delta\hat{B}|\psi\rangle .$$

У простору стања (векторском простору) важи Шварцова неједнакост (коју смо ради једноставности излагања прескочили у 1. поглављу):

$$\langle \chi | \chi \rangle \langle \phi | \phi \rangle \geq |\langle \chi | \phi \rangle|^2 .$$

Напишимо сад ову неједнакост користећи кетове:

$$\langle \chi | \chi \rangle = \langle \psi | \Delta\hat{A}^\dagger \Delta\hat{A} | \psi \rangle = \langle \psi | (\Delta\hat{A})^2 | \psi \rangle$$
$$\langle \phi | \phi \rangle = \langle \psi | \Delta\hat{B}^\dagger \Delta\hat{B} | \psi \rangle = \langle \psi | (\Delta\hat{B})^2 | \psi \rangle$$
$$\langle \chi | \phi \rangle = \langle \psi | \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} | \psi \rangle$$

$$\langle \psi | (\Delta\hat{A})^2 | \psi \rangle \langle \psi | (\Delta\hat{B})^2 | \psi \rangle \geq \left| \langle \psi | \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} | \psi \rangle \right|^2$$
$$\left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle \geq \left| \left\langle \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \right\rangle \right|^2$$

Последњи члан неједначине можемо написати на другачији начин користећи комутатор и антикомутатор:

$$\Delta\hat{A}\Delta\hat{B} = \frac{1}{2}\left[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\right] + \frac{1}{2}\left\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\right\} = \frac{1}{2}\left[\hat{A}, \hat{B}\right] + \frac{1}{2}\left\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\right\}.$$

Први члан је антиермитски оператор чија је очекивана вредност имагинарна; други члан је ермитски оператор чија је очекивана вредност реална. Према томе, у изразу за средњу вредност

$$\left\langle \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \left\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\right\} \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle$$

први члан је реалан, а други имагинаран. Из теорије комплексних бројева знамо да је $|z|^2 = |x|^2 + |y|^2$, где су x, y реални и имагинарни део, редом. Стога следи:

$$\left| \left\langle \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{4}\left| \left\langle \left\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\right\} \right\rangle \right|^2 + \frac{1}{4}\left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle \right|^2.$$

Будући да је $\frac{1}{4}\left| \left\langle \left\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\right\} \right\rangle \right|^2$ позитиван, реалан број, из последње једнакости можемо закључити:

$$\left| \left\langle \Delta\hat{A}\Delta\hat{B} \right\rangle \right|^2 \geq \frac{1}{4}\left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle \right|^2$$

Из две неједнакости следи:

$$\left\langle (\Delta\hat{A})^2 \right\rangle \left\langle (\Delta\hat{B})^2 \right\rangle \geq \frac{1}{4}\left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle \right|^2.$$

Ако коренујемо леву и десну страну неједнакости, добија се на крају:

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left| \left\langle \left[\hat{A}, \hat{B}\right] \right\rangle \right|$$
$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left| \langle \psi | \left[\hat{A}, \hat{B}\right] | \psi \rangle \right|.$$

Формула игра важну улогу у формализму квантне механике и представља **релацију неодређености**. Производ неодређености (несигурности) величина A и B је већи или једнак од (половине) модула средње вредности комутатора два оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Када је комутатор различит од нуле, тада се A и B не могу симултано добити са произвољном тачношћу (што је ΔA мања то је ΔB већа, и обрнуто); тако се, на пример, добијају Хајзенбергове релације неодређености за операторе $\hat{X}$ и $\hat{P}_x$.

Када је комутатор једнак нули, тада релација $\Delta A \Delta B \geq 0$ не значи ништа друго осим да су неодређености (дисперзије) независне (некорелисане), тј. да дисперзија резултата (стандардна девијација) једне величине не утиче на дисперзију друге и да се стога две величине могу симултано потпуно прецизно мерити на систему.

Изведимо сад релацију неодређености за операторе $\hat{X}$ и $\hat{P}_x$. Из опште релације следи:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | \left[\hat{X}, \hat{P}_x \right] | \psi \rangle \right|.$$

Комутатор $\left[\hat{X}, \hat{P}_x \right]$ једнак је $i\hbar \hat{I}$, па из тога следи:

$$\frac{1}{2} \left| \langle \psi | \left[\hat{X}, \hat{P}_x \right] | \psi \rangle \right| = \frac{1}{2} \left| \langle \psi | i\hbar \hat{I} | \psi \rangle \right| = \frac{1}{2} |i\hbar| = \frac{1}{2} \hbar,$$

јер је $\left\langle i\hbar \hat{I} \right\rangle = i\hbar$. Према томе:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

што је Хајзенбергова релација неодређености. Величина Δx је директно повезана са мерењем положаја: она је статистичка флуктуација резултата мерења око средње вредности $\langle x \rangle$; исто се може рећи и за Δp_x.

Обе величине би могле бити прецизне када би се $\hbar$ сматрало занемарљивим, тј. у области важења класичне теорије.

Неодређености положаја и импулса не би требало доводити у везу са обичним грешкама мерења услед несавршености мерних уређаја.

Комутирајуће опсервабле

Заједничка својствена база:

Ако две опсервабле $\hat{A}$ и $\hat{B}$ комутирају, може се направити ортонормирана база простора стања са својственим векторима који су заједнички за $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Покажимо прво да ако два оператора $\hat{A}$ и $\hat{B}$ комутирају и ако је $|\psi\rangle$ својствени вектор од $\hat{A}$, да је тада $\hat{B}|\psi\rangle$ исто својствени вектор од $\hat{A}$ придружен истој својственој вредности. Наиме, применимо $\hat{B}$ на обе стране једнакости $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$: $\hat{B}\hat{A}|\psi\rangle = a\hat{B}|\psi\rangle$. Будући да оператори комутирају важи $\hat{A}\left(\hat{B}|\psi\rangle\right) = a\left(\hat{B}|\psi\rangle\right)$. То смо показали.

Постоје два случаја:

а) ако је a недегенерисана, сви њој придружени вектори су колинеарни и тада је $\hat{B}|\psi\rangle$ пропорционално $|\psi\rangle$, односно $\hat{B}|\psi\rangle = b|\psi\rangle$ и $|\psi\rangle$ је својствени вектор и од $\hat{B}$.

б) ако је a дегенерисана, може се само рећи да $\hat{B}|\psi\rangle$ **припада потпростору** ε_a **од** $\hat{A}$.

Важи и следеће. Ако $\hat{A}$ и $\hat{B}$ комутирају и ако су $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ својствени вектори од $\hat{A}$ који припадају различитим својственим вредностима, тада је матрични елемент $\langle\psi_1|\hat{B}|\psi_2\rangle$ нула (није тешко доказати, пробајте сами).

Размотримо две комутирајуће опсервабле $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Да бисмо поједноставили, претпоставимо да су њихови спектри сасвим дискретни.

Будући да је $\hat{A}$ опсервабла, постоји најмање један ортонормирани систем својствених вектора од $\hat{A}$ који формира базу у простору стања. Означимо ове векторе са $\left\{|u_n^i\rangle\right\}$:
$\hat{A}|u_n^i\rangle = a_n|u_n^i\rangle$; $n=1,2,...$ и $i=1,2,...,g_n$. g_n је димензија својственог потпростора ε_n. Важи: $\langle u_n^i|u_{n'}^{i'}\rangle = \delta_{nn'}\delta_{ii'}$.

Поставља се питање како би изгледала матрица која репрезентује $\hat{B}$ у бази $\left\{|u_n^i\rangle\right\}$? Сви матрични елементи $\langle u_n^i|\hat{B}|u_{n'}^{i'}\rangle$ би били једнаки нули за $n\neq n'$. Дакле, добила би се блок-дијагонална матрица. Постоје онда два случаја:

а) када је a_n недегенерисана својствена вредност, одговарајући блок се редукује на матрицу 1×1, онда је очигледно $|u_n\rangle$ својствени вектор заједнички за $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

б) Када је a_n дегенерисана, блок који представља $\hat{B}$ у ε_n није у општем случају дијагоналан и $|u_n^i\rangle$ нису у општем случају својствени вектори од $\hat{B}$.

Међутим, **у потпростору ε_n се може изабрати друга база** $\left\{|v_n^i\rangle; i=1,2,...,g_n\right\}$ која се састоји од вектора који су својствени вектори и од $\hat{B}$, тј. база у којој је $\hat{B}$ репрезентован дијагоналном матрицом. Нови базисни вектори у ε_n су својствени вектори од $\hat{B}$, тј. $\hat{B}|v_n^i\rangle = b_n|v_n^i\rangle$. Они су наравно аутоматски својствени вектори и од $\hat{A}$ јер се налазе у ε_n.

Да закључимо, својствени вектори од $\hat{A}$ придружени дегенерисаним својственим вредностима нису нужно и својствени вектори од $\hat{B}$. Међутим, увек је могуће изабрати у сваком својственом потпростору од $\hat{A}$ неку базу својствених вектора која је заједничка за $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

Означимо тада са $|u_{n,p}^i\rangle$ својствене векторе заједничке за $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Важи:

$$\hat{A}|u_{n,p}^i\rangle = a_n|u_{n,p}^i\rangle$$
$$\hat{B}|u_{n,p}^i\rangle = b_p|u_{n,p}^i\rangle$$

Индекси n и p нам омогућавају да специфицирамо својствене вредности a_n и b_p. Додатни индекс i се евентуално користи да се означи разлика између различитих базисних вектора који одговарају истим својственим вредностима a_n и b_p.

Комплетан скуп комутирајућих опсервабли (К.С.К.О.):

Размотримо опсерваблу $\hat{A}$ и базу у простору стања ε која се састоји од својствених вектора $\{|u_n^i\rangle\}$ оператора $\hat{A}$. Ако су *све* његове својствене вредности *недегенерисане*, потпростори ε_n су једнодимензиони и постоји једна *јединствена база* у ε формирана од својствених вектора $\hat{A}$. За такву опсерваблу каже се да је ***комплетна* опсервабла** и она сама за себе чини К.С.К.О.

У случају када је једна или неколико својствених вредности од $\hat{A}$ дегенерисана, тада база простора коју чине својствени вектори од $\hat{A}$ очигледно није јединствена: унутар сваког потпростора ε_n димензије $\neq 1$ може се изабрати било која од линеарних комбинација вектора из ε_n (база се може произвољно бирати).

Изаберимо тада другу опсерваблу $\hat{B}$ која комутира са $\hat{A}$ и формирајмо неку ортонормирану базу својствених вектора која је заједничка за $\hat{A}$ и $\hat{B}$. Према дефиницији, $\hat{A}$ и $\hat{B}$ формирају К.С.К.О. *ако је та база јединствена* (до на фазни фактор сваког од вектора базе), тј. ако сваком могућем пару својствених вредности $\{a_n, b_p\}$ кореспондира само један вектор базе.

Да би $\hat{A}$ и $\hat{B}$ чинили К.С.К.О. потребно је и довољно да унутар сваког од ових потпростора све g_n својствене вредности опсервабле $\hat{B}$ буду различите.

Будући да сви вектори у ε_n одговарају истој својственој вредности a_n од $\hat{A}$, g_n вектори $|v_n^i\rangle$ се онда могу разликовати према својственим вредностима од $\hat{B}$ које су им придружене.

Ако за барем један пар вредности $\{a_n, b_p\}$ постоји неколико линеарно независних вектора који су својствени вектори од $\hat{A}$ и $\hat{B}$ придружени тим својственим вредностима, скуп $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ није комплетан. Додајмо им **трећу опсерваблу** $\hat{C}$ која комутира и са $\hat{A}$ и са $\hat{B}$.

Када пару $\{a_n, b_p\}$ одговара само један вектор, овај вектор је нужно и својствени вектор од $\hat{C}$. Међутим, ако постоји неколико вектора, они формирају својствени потпростор $\varepsilon_{n,p}$ у којем је могуће изабрати базу формирану од вектора који су истовремено и својствени вектори од $\hat{C}$.

На тај начин се у простору стања може изградити ортонормирана база формирана од својствених вектора који су заједнички за $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$. Ове три опсервабле чине К.С.К.О. ако је тај скуп јединствен. Спецификација могућег скупа $\{a_n, b_p, c_r\}$ од $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ карактерише тада само један од вектора ове базе. Ако то није случај додаје се опсервабла $\hat{D}$, итд.

Према дефиницији, *скуп опсервабли $\hat{A}$, $\hat{B}$,$\hat{C}$,... се зове комплетан скуп комутирајућих опсервабли ако:* 1) *све опсервабле међусобно комутирају,* 2) *спецификација својствених вредности свих оператора одређује један јединствен (до на мултипликативни фактор) заједнички својствени вектор.*

Другим речима, скуп опсервабли је К.С.К.О. ако постоји јединствена ортонормирана база заједничких својствених вектора. Ти вектори се означавају са

$$\left| a_n, b_p, c_r, \ldots \right\rangle$$

јер их спецификација једног могућег скупа својствених вредности једнозначно одређује.

Избор опсервабли које за дати физички систем чине К.С.К.О. није једнозначан, али је њихов број једнозначно одређен карактеристикама система и има смисао аналоган броју степени слободе у класичној механици. Концепт К.С.К.О. игра веома важну улогу у квантној механици.

Временска секвенца експеримента у физици се може посматрати на следећи начин. У неком почетном тренутку t_0 *препарира* се систем симултано изводећи мерење комплетног скупа компатибилних опсерабли. Његово динамичко стање је тада комплетно одређено у тренутку t_0. Једном када се комплетира ова припрема, таласна функција система се развија током времена на начин који је егзактно одређен Шредингеровом једначином. У свим каснијим тренуцима, динамичко стање система је на тај начин савршено познато, барем догод није пертурбовано интервенцијом од стране мерног уређаја. Евентуално, у неком каснијем времену t изведе се дато мерење. Будући да се зна таласна функција $\psi(t)$ у тренутку када се врши мерење, може се егзактно предвидети статистичка расподела резултата мерења.

Припремити систем у добро дефинисаном квантном стању значи извршити идеално предиктивно селективно мерење свих опсервабли из К.С.К.О.