Векторски простори

1. Појам векторског простора (ВП)

Линеарни векторски простор или само векторски простор над пољем скалара $\mathbb{F}$ (скалари су реални или комплексни бројеви) је **скуп (*V*)** ма каквих математичких објеката ако су у њему дефинисане операције: 1. сабирања елемената скупа и 2. операција множења елемената скупа скаларом.

$\boxed{\text{САБИРАЊЕ: } x+y=z}$, за свако $x, y, z \in V$ (унутрашња композиција)

$\boxed{\text{МНОЖЕЊЕ ВЕКТОРА СКАЛАРОМ:}}$ (спољашња композиција)
Операција множења скаларом је **правило** по којем скалару ($\lambda, \mu \in \mathbb{F}$) и елементу скупа V ($x, y \in V$) придружујемо опет неки елемент из V (пресликавање $\mathbb{F} \times V \to V$).

Елементи скупа V зову се **вектори**.
Када је $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ онда имамо реални векторски простор, а када је $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ онда је то комплексни векторски простор.

Примери ВП

- Простор класичних тродимензионих вектора.
- Скуп свих матрица типа $m \times n$ је такође ВП. Сваки тип матрица $m \times n$ је посебан ВП. Заиста, за матрице истог типа важе сви аксиоми сабирања. На пример, за матрице типа 2×3 (2 врсте и 3 колоне):
  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 & a_3+b_3 \\ a_4+b_4 & a_5+b_5 & a_6+b_6 \end{pmatrix}$.
  Неутрални елемент за сабирање је нула матрица $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, а свака матрица $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}$ има супротну $\begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -a_4 & -a_5 & -a_6 \end{pmatrix}$. Наравно, важи асоцијативност и комутативност.
  Множење матрице скаларом је такође дефинисано као правило:
  $\lambda \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ \lambda a_4 & \lambda a_5 & \lambda a_6 \end{pmatrix}$ и важе сви наведени аксиоми.

- Простор $E_k(\mathbb{C})$: $x \in E_k$, $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)$ је скуп свих уређених k-торки комплексних бројева. Другим речима, један вектор је уређена k-торка. Елементе овог скупа можемо схватити као тачке у k-димензионом простору или као векторе у k-димензионом простору.
  Сабирање се дефинише са:
  $x+y=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k)+(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k)=(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_k+\eta_k)$,

неутрални елемент је $(0,0,\ldots,0)$, супротан за сабирање: $-x=(-\xi_1,-\xi_2,\ldots,-\xi_k)$. Множење скаларом се дефинише са: $\lambda x=(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2,\ldots,\lambda\xi_k)$.
Када су чланови уређених k-торки реални бројеви, онда је то простор R_k.

- Простор $\Pi^{(k)}(\mathbb{C})$, $x\in\Pi^{(k)}$, $x=p_k(t)=\alpha_k t^k+\alpha_{k-1}t^{k-1}+\ldots+\alpha_1 t+\alpha_0$, где је t реална променљива, а α_k у општем случају комплексни број. Елементи овог простора су **полиноми степена не већег од k!** (кажемо не већег од k, јер у том простору су и полиноми нижег степена, тј. неки од α_k могу бити једнаки нули). Јасно је да важе сви аксиоми сабирања и множења скаларом и да полиноми чине ВП.
- Простор свих (бесконачних) низова у општем случају комплексних бројева је такође ВП. Сабирањем одговарајућих чланова низа или множењем свих чланова скаларом опет се добија низ. Ово је генерализација простора E_k, јер се један низ може представити као $x=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_k,\ldots)$.
- Простор $C[a,b]$ је простор свих непрекидних реалних функција на интервалу $[a,b]$. Заиста, сабирање непрекидних функција и њихово множење скаларом опет даје непрекидну функцију. За нас важна информација је да и функције могу бити елементи ВП, односно представљати векторе!

Линеарни потпростори

Линеарни потпростор W над пољем $\mathbb{F}$ је непразан подскуп линеарног векторског простора $V(\mathbb{F})$ са особином да је *затворен* у односу на сабирање и множење скаларом.

Другим речима, за њега важе исти аксиоми сабирања и множења скаларом које важе и за ВП, али резултат сабирања и множења скаларом је увек елемент из истог потпростора (не излази се ван њега). То значи да је и он сам ВП.

Примери:

- Скуп свих вектора у једној равни. Или скуп свих вектора на једној прави. Ни сабирањем ни множењем скаларом не може се добити вектор који ће бити ван те равни или праве.
- Скуп свих конвергентних низова је подскуп скупа свих (бесконачних) низова, јер је збир два конвергентна низа (то сте доказивали из Математике 2) опет конвергентан низ, исто важи и за множење скаларом.

2. Линеарна независност, алгебарска база.

- Линеарна комбинација чланова ВП $x_1, x_2, \ldots, x_n$ је израз облика:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$. При конкретном избору λ_i имамо једну линеарну комбинацију.

- За скуп чланова ВП $x_1, x_2, \ldots, x_n$ кажемо да су **линеарно зависни** ако постоји скуп скалара $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ који нису сви нула (барем један од њих је различит од нуле), такав да је:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = 0$$

Ако је ово испуњено само за свако $\lambda_i = 0$, онда су ови вектори **линеарно независни.**

Другим речима, они су независни ако се ни један од њих не може написати као линеарна комбинација других, што и сама реч (линеарно) «независно» значи
! разликујте линеарну независност од независности).

- Шта одређује **димензију простора** ($\dim V$)?

Максималан број линеарно независних елемената одређује димензију простора.
То значи да је ВП k-димензион ако у њему постоји *највише* k линеарно независних елемената.
Према томе, скуп од $k+1$ елемената је сигурно линеарно зависан (елемент $k+1$ се може приказати као линеарна комбинација осталих k).

На пример, у простору класичних вектора таквих вектора има 3, зато кажемо да је простор тродимензион. Има их *највише* 3. Сваки четврти вектор можемо представити као линеарну комбинацију ова три.

- Шта је **линеал** над скупом линеарно независних елемената?

Линеал је *скуп свих линеарних комбинација* над датим скупом линеарно независних елемената.

- Ако је линеал над датим скупом линеарно независних елемената једнак целом простору, тада тај скуп елемената чини Алгебарску (или Хамелову) **базу** тог простора.

То значи да се сваки елемент из ВП може представити помоћу линеарне комбинације базисних елемената! (Нема елемента из ВП који се на тај начин не може представити, па је логично што се онда тај скуп зове база простора).
Број чланова базе је једнозначан и једнак димензији простора.

3. Унитарни простори

Дефиниција скаларног производа

Унитарни простори су ВП у којима је дефинисан **скаларни производ**

Скаларни производ елемената унитарног простора x и y је **правило** по којем им се придружује *скалар* (реалан или комплексни број);

другим речима, то је функција која сваком уређеном пару (x, y) вектора из V придружује скалар из $\mathbb{F}$. Скаларни производ се означава са (x, y).

Аксиоми скаларног производа:

1. Особина ермитске симетрије:
$$(x, y) = (y, x)^*$$
где смо са звездицом (*) означили комплекну конјугацију.

2. Линеарност по другом фактору (антилинеарност по првом фактору):
$$(x, \lambda y) = \lambda (x, y)$$
Из линеарности по другом фактору и аксиома 1, следи антилинеарност по првом:
$(\lambda x, y) = (y, \lambda x)^* = \lambda^* (y, x)^* = \lambda^* (x, y)$. Према томе,
$$(\lambda x, y) = \lambda^* (x, y)$$
Ако је λ са десне стране скаларног производа излази испред неизмењен, а ако је са леве излази комплексно конјугован. Наравно, ако је λ реалан број, ово је особина асоција-тивности.
3. Дистрибутивност:
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z), \quad (x, y + z) = (x, y) + (x, z)$$
4. Важно својство – скаларни производ је позитивно дефинитан:
$$(x, x) \geq 0$$
при чему је $(x, x) = 0$ ако и само ако је x нула вектор.
(x, x) је *реалан* ненегативан број.

Примери унитарних простора

- ВП класичних вектора је унитарни простор јер је дефинисан скаларни производ $\vec{A}\cdot\vec{B}$. За њега важе сви аксиоми. Посебно наглашавамо четврти, јер је $\vec{A}\cdot\vec{A}=\left|\vec{A}\right|^2\geq 0$, и добија се реалан позитиван број, који зовемо квадрат интензитета вектора.

- Простор матрица типа $m\times n$ (које димензије је овај простор?). Скаларни производ се дефинише са:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\xi_{ij}{}^{*}\eta_{ij}$$

где је ξ_{ij} елемент i-те врсте и j-те колоне матрице x, а η_{ij} елемент i-те врсте и j-те колоне матрице y.

- Простор $E_k^{(2)}$ уређених k-торки комплексних бројева у којем је дефинисан скаларни производ:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{k}\xi_i^{*}\eta_i$$

где $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_k)$ и $y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_k)$.
За домаћи: доказати да важе сва четири аксиома скаларног производа.

- Простор полинома $\Pi^{(k)}[a,b]$, елементи $p^{(k)}(t)=\alpha_k t^k+\dots+\alpha_1 t+\alpha_0$. У овом ВП могуће је дефинисати скаларни производ два елемента простора, тј. два полинома:

$$\left(p_1^{(k)},p_2^{(k)}\right)=\int_a^b p_1^{*}\cdot p_2\,dt$$

4. Ортогоналност и норма вектора

Након што смо дефинисали скаларни производ, можемо дефинисати дужине и углове, другим речима *метрику* простора. Дефинишимо прво када су два вектора „ортогонална“.

Према аналогији са класичним векторима, где су два вектора ортогонална (нормална) када им је скаларни производ једнак нули, тј. $\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\left(\vec{A},\vec{B}\right)=0$, уопштавамо за два вектора унитарног простора да су **ортогонална** ако им је скаларни производ једнак нули:

$$\left(x,y\right)=0$$

Норма елемента x је уопштење појма интензитета или дужине вектора. Интензитет класичних вектора је дефинисан са $\left|\vec{A}\right|=\sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$. Према аналогији, **норма** вектора x дефинисана је као квадратни корен из (x,x):

$$\left\|x\right\|=+\sqrt{\left(x,x\right)}$$

Норма је реалан ненегативан број.

Где сте већ срели норму неког вектора а да се не ради о класичним векторима?

У простору таласних функција (који је функционалан простор), квадрат норме таласне функције (скаларни производ функције са самом собом) једнак је јединици, према Борновој статистичкој интерпретацији (Атомистика).

Према томе, скраћен исказ је: према Борну, норма таласне функције је један, или функција је нормирана на јединицу. О функционалним просторима говорићемо касније.

Ортонормирана база

Дефинисали смо *ортогоналност* два вектора и *норму* вектора у неком унитарном простору. Сада ћемо те дефиниције користити да бисмо дефинисали ортонормирану базу простора.

Рекли смо да су два елемента ортогонална ако је њихов скаларни производ једнак нули. **Ортогоналан скуп** чине елементи који су сви узајамно ортогонални, а **ортонормиран скуп** чине елементи који осим што су међусобно ортогонални, сваки од њих је нормиран на јединицу. Скраћено се то може написати са:

$$\left(x_i, x_j\right) = \delta_{ij}$$

Ортонормирана база (ОНБ) унитарног простора је алгебарска база коју чине ортонормирани елементи.
Алгебарска база има коначан број елемената код коначно-димензионих простора.
Ако је простор k-димензион, онда алгебарска база има k елемената и сваки елемент тог простора се може изразити као линеарна комбинација елемената који чине базу:

$$x = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$$

Пример. У простору матрица 2×2, $\mathbb{R}^{22}$, ортонормиран скуп матрица може бити:

$m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, и $m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Лако се види да је скаларни производ било које две различите матрице једнак нули, а да су скаларни производи сваке матрице са самом собом једнаки јединици.

5. Грамове детерминанте

Сад кад смо увели скаларни производ, на једноставнији начин можемо испитати *линеарну (не)зависност*.

Од елемената $x_1, x_2, \ldots, x_n$ формирајмо линеарну комбинацију и изједначимо је са нула вектором:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \vec{0}$$

Овај услов је тривијално испуњен за свако $\lambda_i = 0$. Питање је да ли постоје нетривијална решења (која би указала на линеарну зависност)?

Да бисмо одговорили на то питање формирајмо систем једначина: помножимо скаларно горњу једнакост са леве стране са x_1, затим помножимо са x_2, итд до x_n. Добија се систем једначина (применом 2. аксиома скаларног производа):

$$\begin{gathered}
\lambda_1(x_1, x_1) + \lambda_2(x_1, x_2) + \ldots + \lambda_n(x_1, x_n) = 0 \\
\lambda_1(x_2, x_1) + \lambda_2(x_2, x_2) + \ldots + \lambda_n(x_2, x_n) = 0 \\
\vdots \\
\lambda_1(x_n, x_1) + \lambda_2(x_n, x_2) + \ldots + \lambda_n(x_n, x_n) = 0 \,.
\end{gathered}$$

Будући да смо кренули од познатих елемената $x_1, x_2, \ldots, x_n$, лако можемо одредити међусобне скаларне производе, тако да су они познате величине. **Непознати су нам коефицијенти λ_i.**

Нетривијална решења (да неки λ_i буду различити од нуле) добијају се само када:

$$G_n = \begin{vmatrix} (x_1, x_1) & (x_1, x_2) & \cdots & (x_1, x_n) \\ (x_2, x_1) & (x_2, x_2) & \ldots & (x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (x_n, x_1) & (x_n, x_2) & \ldots & (x_n, x_n) \end{vmatrix} = 0$$

Ако се добије да је ова детерминанта **нула**, онда постоје нетривијана решења за λ_i и систем је **линеарно зависан**. Међутим, ако ова детерминанта није једнака нули, онда је систем линеарно независан.

Ако елементи $x_1, \ldots, x_n$ чине ортонормирани скуп вектора, онда је G_n = 1 и систем је линеарно независан.

Помоћу Грамове детерминанте смо, према томе, показали да је сваки ортонормирани скуп вектора линеарно независан.

6. Фуријеово разлагање. Беселова и Парсевалова једначина.

Нека елементи $x_1, x_2, \ldots, x_k$ чине ортонормирану базу (ОНБ) у k-димензионом простору. Тада се било који елемент x датог простора може представити као:

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i}$$

где су f_i скалари, у општем случају комплексни бројеви. Наведени развој се зове **Фуријеов развој** елемента x по алгебарској бази $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Пошто је база ОНБ, коефицијенте f_i можемо добити тако што ћемо једначину скаларно помножити са леве стране са елементом из базе x_p:

$$(x_p, x) = \left(x_p, \sum_{i=1}^{k} f_i x_i \right) = \sum_{i=1}^{k} f_i (x_p, x_i) = \sum_{i=1}^{k} f_i \delta_{pi} = f_p$$

$$f_p = (x_p, x)$$

Према томе, на једноставан начин користећи скаларни производ добили смо **Фуријеове коефицијенте** f_p.

Примери. Са Фуријеовим развојем сте се сусрели такође у школи. Векторе сте представљали помоћу координата (то су Фуријеови коефицијенти). У ортонормираној бази $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ важи $\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$. Фуријеови коефицијенти су «координате» a_i које се добијају помоћу скаларних производа: $a_p = \vec{e}_p \cdot \vec{A}$. И Фуријеов ред је један пример овог развоја.

Као што се операције са класичним векторима могу изразити преко операција са њиховим координатама, тако и у унитарном простору операције са елементима простора можемо свести на операције са њиховим Фуријеовим коефицијентима.

а) За сабирање очигледно важи: $x + y = \sum_{i=1}^{k} f_i x_i + \sum_{i=1}^{k} g_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (f_i + g_i) x_i$

б) За множење скаларом: $\lambda x = \lambda \sum_{i=1}^{k} f_i x_i = \sum_{i=1}^{k} (\lambda f_i) x_i$.

в) За скаларни производ, примењујући аксиоме дистрибуције и асоцијације важи:

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i, \sum_{j=1}^{k} g_j x_j \right) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} (f_i x_i, g_j x_j) = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} f_i^* g_j (x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{k} f_i^* g_i \ .$$

$$\left(x,y\right)=\sum_{i=1}^{k} f_i^* g_i$$

је Парсевалова једнакост.

Коментар. (x, y) је, према томе, зависан од избора базе; у некој другој бази ови вектори ће имати другачије координате па ће скаларни производ имати другу вредност. У поглављу о репрезентацијама (3.) **ћемо показати да су скаларни производи *исти* када су базе добијене једна из друге унитарном трансформацијом (а то је увек случај када су две базе ортонормиране).**

г) За норму следи:

$$\|x\|^2=\left(x,x\right)=\left(\sum_{i=1}^{k} f_i x_i,\sum_{j=1}^{k} f_j x_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}\left(f_i x_i,\, f_j x_j\right)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} f_i^* f_j\left(x_i,x_j\right)=\sum_{i=1}^{k} f_i^* f_i=\sum_{i=1}^{k}\left|f_i\right|^2$$

.

$$\|x\|^2=\sum_{i=1}^{k}\left|f_i\right|^2$$

је Беселова једначина.

Код класичних вектора: $\left|\vec{A}\right|^2=A_x^2+A_y^2+A_z^2$. Беселова једначина је специјалан случај Парсевалове једначине.

Фуријеовим развојем сваком елементу датог унитарног простора x придружује се уређена k-торка бројева (Фуријеових коефицијената) *у односу на дату базу*:

$$x=\sum_{i=1}^{k} f_i x_i\ ,\ x\in X \qquad \leftrightarrow \qquad \left(f_1, f_2,\dots, f_k\right)\in E_k^{(2)}$$

То значи да између елемената простора V и елемената $E_k^{(2)}$ простора постоји **узајамно једнозначно пресликавање (1-1 и на пресликавање**): сваком елементу из V придружује се тачно један елемент из $E_k^{(2)}$ и обрнуто.

То значи да се целокупни простори пресликавају један у други, при чему је ово пресликавање *алгебарски изоморфизам* (пресликавање при којем је очувана алгебарска структура ВП, тј. сабирање и множење скаларом).

Наведени изоморфизам зваћемо **репрезентацијом** вектора из простора $V(\mathbb{F})$ помоћу вектора из простора $E_k^{(2)}$ која је условљена (или се остварује) избором базе у $V(\mathbb{F})$.

7. Грам-Шмитов поступак ортонормирања

Полазећи од било које алгебарске базе задане у коначно-димензионом простору, Грам-Шмитовим поступком се може конструисати ортонормирана база. Поступак је следећи:

Нека су елементи полазне базе: $y_1, y_2, \dots, y_k \in V$. Означимо елементе ортогоналне базе коју хоћемо да добијемо са: $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^* \in V$. Од елемената полазне базе се формирају линеарне комбинације облика:

$$
\begin{aligned}
&y_1^* = y_1 \\
&y_2^* = y_2 + \gamma_{21} y_1 \\
&y_3^* = y_3 + \gamma_{32} y_2 + \gamma_{31} y_1 \\
&\vdots \\
&y_k^* = y_k + \gamma_{k(k-1)} y_{(k-1)} + \ldots + \gamma_{k1} y_1
\end{aligned}
$$

Затим, из услова ортогоналности $\left(y_1^*, y_2^*\right) = 0$ добија се вредност коефицијента γ_{21}; из услова $\left(y_3^*, y_1^*\right) = 0$ и $\left(y_3^*, y_2^*\right) = 0$ налазимо γ_{32} и γ_{31}; итд. У последњем кораку треба одредити $k-1$ коефицијената. Добијене коефицијенте уврстимо у почетне линеарне комбинације и на тај начин смо добили ортогоналну базу $y_1^*, y_2^*, \dots, y_k^* \in V$.

Ако нам је циљ да сви чланови базе буду и нормирани, тада израчунамо норме сваког елемента базе y_i^* (те норме у општем случају нису једнаке јединици, него су позитивни реални бројеви), а затим y_i^* поделимо са његовом нормом $\left\|y_i^*\right\|$:

$$
Y_i = \frac{y_i^*}{\left\|y_i^*\right\|}
$$

Тако добијамо ортонормирани систем $Y_1, Y_2, \dots, Y_k \in V$.

Резултат ортогонализације је увек једнозначан. Овај поступак нам омогућава да се код унитарних простора ограничимо на коришћење само ортонормираних база.

Пример 1. У простору матрица 2×2 дати су елементи:

$$m_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\ m_2=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ m_3=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ m_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

а) Проверити да ли су ови елементи линеарно независни (на класичан начин из линеарног система једначина и помоћу Грамове детерминанте).

б) Написати матрицу $m=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ као линеарну комбинацију датих матрица.

в) од матрица m_1,m_2,m_3 и m_4 направити ортонормирану базу простора помоћу Шмитовог поступка. (Прво треба одредити ортогоналан систем m_1^*,m_2^*,m_3^*,m_4^*, а затим сваку добијену матрицу нормирати тако да се добије ортонормиран систем: μ_1,μ_2,μ_3,μ_4.)

г) Сада када смо добили ОНБ, одредити Фуријеове коефицијенте развоја матрице $m=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ по бази μ_1,μ_2,μ_3,μ_4.

д) Проверити важење Беселове једначине на примеру развоја г).

Пример 2.

У простору $\Pi^{(3)}[-1,1]$ елементи су полиноми степена не већег од три, дефинисани на затвореном интервалу $[-1,1]$.

Одредити ортонормирану базу овог простора полазећи од алгебарске базе: $p_1=1$, $p_2=t$, $p_3=t^2$, $p_4=t^3$.

а) Помоћу Грамове детерминанте проверити да ли је систем линеарно независан;

б) Примењујући Шмитов поступак, одредити ортогоналан систем p_1^*,p_2^*,p_3^*,p_4^*, а затим ортонормиран систем полинома P_1,P_2,P_3,P_4.

Решење: $P_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $P_2=\sqrt{\frac{3}{2}}t$, $P_3=\sqrt{\frac{5}{2}}\frac{3t^2-1}{2}$, $P_4=\sqrt{\frac{7}{2}}\frac{5t^3-3t}{2}$. p_1^*,p_2^*,p_3^*,p_4^* су прва четири Лежандрова полинома. Они се, дакле, добијају Шмитовим поступком ортогонализације почевши од базе $1,t,t^2,t^3,\ldots$ на интервалу $[-1,1]$.

8. Хилбертови простори

Хилбертов простор над пољем $\mathbb{F}$ је векторски простор у којем је дефинисан **скаларни производ**, са особином да је *комплетан* и *сепарабилан*. **Хилбертови простори су простори *стања* у квантној механици.** Они су названи према Дејвиду Хилберту (*David Hilbert*).

За студенте које занима шта је **комплетност** и сепарабилноста, ево кратког објашњења. У математичкој анализи, простор V је комплетан ако сваки Кошијев низ елемената у V има лимит (граничну вредност) која исто припада V, тј. ако сваки Кошијев низ у V конвергира у V. **Интуитивно, простор је комплетан ако нема «тачака које недостају».** Нпр. скуп рационалних бројева није комплетан, јер се може направити низ рационалних бројева чији је лимит $\sqrt{2}$, а тај лимит је ван простора рационалних бројева. Простор $\mathbb{R}$ реалних бројева и простор $\mathbb{C}$ комплексних бројева су комплетни.

Простор је **сепарабилан** ако садржи свуда густ пребројив подскуп. Сваки простор који је коначан или пребројиво бесконачан је сепарабилан. Међутим, простор који је непребројиво бесконачан може такође бити сепарабилан. На пример, скуп реалних бројева је сепарабилан, јер рационални бројеви формирају свуда густ пребројив подскуп.

Унитарни простори се још зову прет-Хилбертови простори. Ако су још комплетни и сепарабилни онда постају Хилбертови простори. **Коначно-димензиони унитарни простори су увек комплетни и сепарабилни, па су они такође и Хилбертови простори.** Међутим, код бесконачно-димензионих простора то не мора бити случај, па су тада унитарни простори у правом смислу речи прет-Хилбертови.

Хилбертови простори могу бити коначно и бесконачно-димензиони (Некада се Хилбертови простори стриктно дефинишу као бесконачно-димензиони; међутим, у литератури из квантне механике они се често односе на све просторе стања, па тако и на коначно-димензионе).

Комплетност и сепарабилност омогућавају да **база** бесконачно-димензионих простора буде **пребројива** (дискретна база), тако да се може нанизати $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ (шта мислите, зашто је то важно?).

Дакле, сепарабилни Хилбертови простори садрже *пребројиву* ортонормирану базу (наводимо све без доказа).

Постоји један шири простор у којем се поред вектора из Хилбертовог простора појављују **и тзв. *уопштени* вектори**, **који немају коначну норму**; такав простор се назива ***опремљени* Хилбертов простор** и њега ћемо такође разматрати.

Најважнија питања:

- Шта су вектори?
- Шта је база?
- Шта је ортонормирана база?