

ПОГЛАВЉЕ 9:

ЊУТНОВА ФОРМУЛА

Решавање диференцијалних једначина

Табела за коефицијенте Њутнове формуле за $k = 0$

Њутнова таблица за затворени интервал, $k = 0$							
$n \backslash i$	1	2	3	4	5	6	именилац
2	1						2
3	1	4					6
4	1	3					6
5	7	32	12				90
6	19	75	50				288
7	41	216	27	272			840
8	751	3577	1323	2989			17280
9	989	5888	-928	10496	-4540		28350
10	2857	15741	1080	19344	5778		89600
11	16067	106300	-48525	272400	-260550	427368	598752

ЊУТН-КОТЕСОВА КВАДРАТНА ИНТЕРПОЛАЦИОНА ФОРМУЛА

$$\int_c^d f(x) dx = (d - c) \cdot \sum_{i=1}^n I_{i,k}^{(n)} \cdot y_{i-1}$$

m - број подинтервала

n - број тачака

i – редни број тачке

$k = 0$ или 1 означава да ли је формула затвореног или отвореног типа

$d - c$ - интервал интеграције

$I_{i,k}^{(n)}$ - Њутнови коефицијенти

$$I_{i,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i}}{(n-1+2k) \cdot (i-1)! \cdot (n-i)!} \cdot \int_{1-k}^{n+k} \frac{(y-1) \cdot (y-2) \cdot \dots \cdot (y-n)}{y-i} \cdot dy$$

Коефицијенти не зависе од интервала интеграције. Вредности коефицијената које су подједнако удаљени од крајева интеграције су међусобом једнаки.

$$I_{i,k}^{(n)} = I_{n-i+1,k}^{(n)}$$

$$I_{n-i+1,k}^{(n)} = \frac{(-1)^{i-1}}{(n-1+2k) \cdot (n-i)! \cdot (i-1)!} \cdot \int_{1-k}^{n+k} \frac{(y-1) \cdot (y-2) \cdot \dots \cdot (y-n)}{y-n+i-1} \cdot dy$$

Пример 1. Помоћу Њутнове формуле израчунати интеграл:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x^2 \right) \cdot dx$$

Интервал интеграције је подељен на 10 једнаких делова. ($I_T=3,026480514$).

Решење:

$$y_0 = \frac{1}{x_0} + x_0^2, \quad y_1 = \frac{1}{x_1} + x_1^2, \dots$$

$$x_0=1,0 \quad y_0=2$$

$$x_1=1,1 \quad y_1=2,1190909$$

$$x_2=1,2 \quad y_2=2,2733333$$

$$x_3=1,3 \quad y_3=2,4592308$$

$$x_4=1,4 \quad y_4=2,6742857$$

$$x_5=1,5 \quad y_5=2,9166667$$

$$x_6=1,6 \quad y_6=3,185$$

$$x_7=1,7 \quad y_7=3,4782353$$

$$x_8=1,8 \quad y_8=3,7955556$$

$$x_9=1,9 \quad y_9=4,1363158$$

$$x_{10}=2,0 \quad y_{10}=4,5$$

$$m = 10$$

$$n = 11$$

$$I = I_{1,0}^{(11)} \cdot (y_0 + y_{10}) + I_{2,0}^{(11)} \cdot (y_1 + y_9) + I_{3,0}^{(11)} \cdot (y_2 + y_8) + I_{4,0}^{(11)} \cdot (y_3 + y_7) + I_{5,0}^{(11)} \cdot (y_4 + y_6) + I_{6,0}^{(11)} \cdot y_5$$

$$I = \frac{1}{598725} \cdot [16067 \cdot (2 + 4,5) + 106300 \cdot (2,119091 + 4,136316) - 48525 \cdot (2,273333 + 3,7955556) + 272400 \cdot (2,459231 + 3,478235) - 260550 \cdot (2,674286 + 3,186) + 427368 \cdot 2,916667]$$

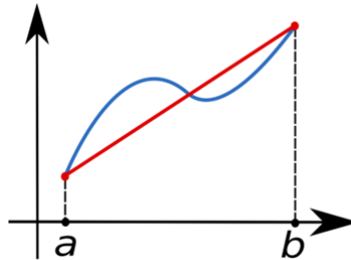
$$I = 3,026568244$$

$$\Delta I = |I_T - I| = |3,026480514 - 3,026568244| = 0,000088$$

$$I = 3,02657 \pm 0,00009$$

ТРАПЕЗНА ФОРМУЛА

Трапезна формула је специјалан случај Њутнове формуле, када је $n = 2$. Са слике се види да је на тај начин површина испод криве сведена на површину трапеза.

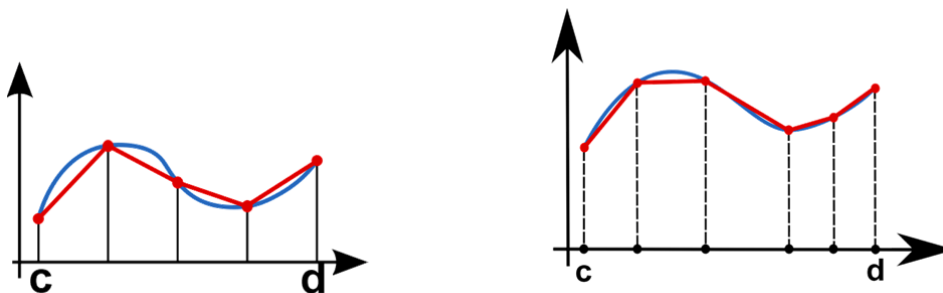


Образац за површину трапеза је: $\frac{\text{основица} + \text{основица}}{2} \cdot \text{висина трапеза}$.

На приказаној слици основице су вредности функција у граничним тачкама интервала: $f(c)$ и $f(d)$,

а висина је ширина интервала: $h = d - c$. Површина дата као $\int_c^d f(x) \cdot dx = h \cdot \frac{f(c) + f(d)}{2}$.

Грешка трапезне формуле је обично велика, зато је неопходно поделити површину на више области, али на такав начин да је површина испод изломљене линије приближна површини испод функције. На слици лево је приказана подела која не одговара функцији, док са десне стране изломљена линија задовољавајуће добро прати график функције.



Након сабирања површина трапеза за сваки појединачни интервал, добија се следећи израз:

$$\int_c^d f(x) \cdot dx = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \dots + 2 \cdot y_{m-1} + y_m)$$

Овај израз је означен као уопштена трапезна формула.

$$h = \frac{d - c}{m}$$

m - број подинтервала

h – ширина подинтервала

d – c је интервал интеграције

Пример 2.

Интеграл из претходног примера решите помоћу Трапезне формуле, користећи исте услове:

Решење:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x^2 \right) \cdot dx = \frac{h}{2} \cdot (y_0 + 2 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 2 \cdot y_3 + 2 \cdot y_4 + 2 \cdot y_5 + 2 \cdot y_6 + 2 \cdot y_7 + 2 \cdot y_8 + 2 \cdot y_9 + y_{10})$$

$$h = \frac{d - c}{m} = \frac{2 - 1}{10} = 0,1$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x^2 \right) \cdot dx = \frac{0,1}{2} \cdot (2 + 2 \cdot 2,1190909 + 2 \cdot 2,2733333 + 2 \cdot 2,4592308 + 2 \cdot 2,6742857 + 2 \cdot 2,9166667 + 2 \cdot 3,185 + 2 \cdot 3,4782353 + 2 \cdot 3,7955556 + 2 \cdot 4,1363158 + 4,5) = 3,253771412$$

$$\Delta I = |I_T - I| = |3,026480514 - 3,253771412| = 0,227290898$$

$$I = 3,0 \pm 0,3$$

СИМСОНОВА ФОРМУЛА

Узмимо сада да је $n = 3$. Интерполациони чворови су тачке c , $\frac{c+d}{2}$ и d . Интерполациони полином је другог степена. Геометријски значи да повлачимо параболу кроз крајње и средњу тачку криве дате функције. Након подела графика на $2 \cdot m$ једнаких делова (подинтервала) добија се израз за Симсонову формулу.

$$\int_c^d f(x) \cdot dx = \frac{d - c}{6m} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \dots + 2 \cdot y_{2m-2} + 4 \cdot y_{2m-1} + y_{2m})$$

$$h = \frac{d - c}{2 \cdot m}$$

2m - број подинтервала

h – ширина подинтервала

d-c интервал интеграције

Пример 3.

Интеграл из претходног примера решите помоћу Симсонове формуле, користећи исте услове:

Решење:

$$h = \frac{d - c}{2 \cdot m} = \frac{2 - 1}{10}$$

$$m = 5$$

$$2 \cdot m = 10$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x^2 \right) \cdot dx = \frac{h}{3} \cdot (y_0 + 4 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 4 \cdot y_3 + 2 \cdot y_4 + 4 \cdot y_5 + 2 \cdot y_6 + 4 \cdot y_7 + 2 \cdot y_8 + 4 \cdot y_9 + y_{10})$$

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x^2 \right) \cdot dx = \frac{1}{30} \cdot (2 + 4 \cdot 2,1190909 + 2 \cdot 2,2733333 + 4 \cdot 2,4592308 + 2 \cdot 2,6742857 + 4 \cdot 2,9166667 + 2 \cdot 3,185 + 4 \cdot 3,4782353 + 2 \cdot 3,7955556 + 4 \cdot 4,1363158 + 4 \cdot 5) = 3,026483573$$

$$\Delta I = |I_T - I| = |3,026480514 - 3,026568244| = 0,000088$$

$$I = 3,02657 \pm 0,00009$$