ПОГЛАВЉЕ 8:

АДАМСОВА ФОРМУЛА

Решавање диференцијалних једначина

Нека је дата диференцијална једначина $\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right)$ на интервалу $\left[c, d\right]$ и почетни услов $x = x_0$ и $y = y_0$. Решење диференцијалне једначине ћемо најлакше наћи ако интервал поделимо на m једнаких делова означених са $n = m + 1$ тачака. Ширина сваког подинтервала је $h = \frac{d-c}{m}$. Укупно ћемо имати n решења у свакој од n тачака: $\left(x_1, y_1\right), \left(x_2, y_2\right), \left(x_3, y_3\right), \ldots\left(x_n, y_n\right)$.

Прве разлике унапред између вредности функција две суседне тачке су дате изразима:

$\Delta y_0 = y_1 - y_0$

$\Delta y_1 = y_2 - y_1$

$\Delta y_2 = y_3 - y_2$

$\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$

, односно једним општим изразом

$\Delta y_{k-1} = y_k - y_{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$

Затим постоје друге разлике или разлике другог реда:

$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = y_2 - y_1 - y_1 + y_0 = y_2 - 2 \cdot y_1 + y_0$

$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 = y_3 - y_2 - y_2 + y_1 = y_3 - 2 \cdot y_2 + y_1$

$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2 = y_4 - y_2 - y_2 + y_1 = y_4 - 2 \cdot y_3 + y_2$

$\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_n - \Delta y_{n-2} == y_n - y_{n-1} - y_{n-1} + y_{n-2} = y_n - 2 \cdot y_{n-1} + y_{n-2}$

, односно једним општим изразом

$\Delta^2 y_{k-2} = \Delta y_{k-1} - \Delta y_{k-2} = y_k - 2 \cdot y_{k-1} + y_{k-2} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$

Аналогно би било са разликама вишег реда. Исто се може применити и на разлике извода, јер и изводи функција представљају неку функцију.

Прве разлике извода функција: $\Delta y'_{k-1} = y'_k - y'_{k-1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n$

Друге разлике извода функција: $\Delta^2 y'_{k-2} = \Delta y'_{k-1} - \Delta y'_{k-2} = y'_k - 2 \cdot y'_{k-1} + y'_{k-2} \quad k = 1, 2, \ldots, n$

Функција се може развити у Тејлотов ред у околини тачке $x = x_0$:

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{1!} y_0^{'} + \frac{\left(x - x_0\right)^2}{2!} y_0^{''} + \frac{\left(x - x_0\right)^3}{3!} y_0^{'''} + ... + R$$

Прве две тачке се добијају према Тејлоровој формули:

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_0 + \frac{\boldsymbol{h}}{1!} \boldsymbol{y}_0^{'} + \frac{\boldsymbol{h}^2}{2!} \boldsymbol{y}_0^{''} + \frac{\boldsymbol{h}^3}{3!} \boldsymbol{y}_0^{'''}$$

$$\boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_1 + \frac{\boldsymbol{h}}{1!} \boldsymbol{y}_1^{'} + \frac{\boldsymbol{h}^2}{2!} \boldsymbol{y}_1^{''} + \frac{\boldsymbol{h}^3}{3!} \boldsymbol{y}_1^{'''}$$

Све остале тачке се налазе према Адамсовој формули:

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{1} \cdot y_{k-1}^{'} + \frac{h}{2} \cdot \Delta y_{k-2}^{'} + \frac{5h}{12} \Delta^2 y_{k-3}^{'} + \frac{3h}{8} \Delta^3 y_{k-4}^{'} + ...$$

$$\Delta \boldsymbol{y}_{k-1}^{'} = \boldsymbol{y}_k^{'} - \boldsymbol{y}_{k-1}^{'}$$

$$\Delta \boldsymbol{y}_{k-2}^{'} = \boldsymbol{y}_{k-1}^{'} - \boldsymbol{y}_{k-2}^{'}$$

$$\Delta^2 \boldsymbol{y}_{k-1}^{'} = \Delta \boldsymbol{y}_k^{'} - \Delta \boldsymbol{y}_{k-1}^{'}$$

$$\Delta^2 \boldsymbol{y}_{k-2}^{'} = \Delta \boldsymbol{y}_{k-1}^{'} - \Delta \boldsymbol{y}_{k-2}^{'}$$

$$\Delta^3 \boldsymbol{y}_{k-1}^{'} = \Delta^2 \boldsymbol{y}_k^{'} - \Delta^2 \boldsymbol{y}_{k-1}^{'}$$