

ПОГЛАВЉЕ 1: ЗАПИСИВАЊЕ ВРЕДНОСТИ МЕРЕЊА И ИЗРАЧУНАВАЊА

Једина врста физичке величине чија се вредност може тачно одредити су дискретне величине: број новчаница, број година, број пацова – заморчића, 60 s у 1 min. Тачну вредност за физичке величине чије се вредности континуално мењају није могуће знати: дужина, маса, време... Грешке које се праве приликом мерења су разлог због кога није могуће добити тачну вредност. Њихове вредности се могу јавити у неком опсегу. Можемо само проценити колики је опсег у коме се могу јавити наша мерења, односно можемо проценити колико су наша мерења несигурна. Процена несигурности мерења нам је неопходна приликом записивања вредности мерења.

Пример 1.

Мерењем моларности раствора калијум перманганата добијене су следеће вредности у mol/l: 0,1010; 0,1020; 0,1012; 0,1015. Вредности се јављају у опсегу од 0,1010 mol/l до 0,1020 mol/l, тј. на основу грубе процене несигурност мерења је 0,001 mol/l. Закључујемо да наше мерење даје следеће сигурне цифре 0,10, док се већ на трећој децимали не може рећи која је цифра у питању (0, 1, 2 или 3). Од четврте децимале нема никаквог смисла процењивати која цифра може бити у питању.

Значајне и сигурне цифре

Резултати мерења се записују помоћу сигурних и значајних цифара. ЗНАЧАЈНЕ ЦИФРЕ (significant figures) могу бити све цифре различите од нуле. За нуле важе различита правила, зависно од њихове позиције.

Пример 2.

На примеру броја 0,0045009300 (**слика 1**) јасно се виде све позиције које могу имати нуле у једном броју. Нуле са крајње леве стране се налазе испред свих цифара различитих од нуле. Нуле у средини су оне које се налазе између цифара различитих од нуле. Нуле са крајње десне стране су смештене иза свих цифара различитих од нуле.



Слика 1. Различите позиције нуле једне бројне вредности.

Нуле смештене између и са десне стране цифара различитих од нуле се могу сврстати у значајне цифре. Када постоји децималан зарез, нуле са десне стране су значајне, јер показују прецизност мерења. Међутим, ако децималан зарез не постоји, нуле на крајњој десној страни се не сматрају значајним. Појам значајних и сигурних цифара је везан за несигурност мерења.

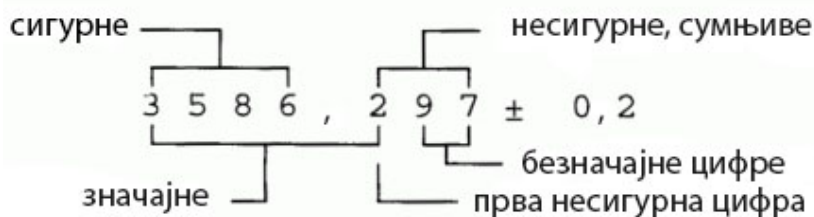
Пример 3.

Вредност 0,4050 g има 4 значајне цифре. Нула са крајње леве стране није значајна цифра, јер нам не даје никакву суштинску информацију везану за вредност мерења. Децимална места не играју никакву улогу. Измерена маса се може написати и као 405,0 mg, чиме се „изгубила“ нула са леве стране зареза. Нула на крајњој десној страни је битна (значајна), јер показује да је вага у стању да мери масе са прецизношћу реда величине од 10^{-4} g. Сматра се да број 1.500 има само две значајне цифре 1 и 5.

Пример 4.

Препознајте које су цифре значајне.

Запис вредности $3586,297 \pm 0,2$ показује да се резултати мерења могу јавити приближно у опсегу од 3586,1 до 3586,5. Број 0,2 иза знака $\pm$ је мера несигурности у наш резултат и показује колико смо сигурни у вредност коју смо написали. Потпуно смо сигурни да ће се прве четири значајне цифре (3, 5, 8 и 6) појавити у резултату свих поновљених мерења. Њих називамо СИГУРНИМ ЦИФРАМА (*certain figures*). Пета значајна цифра је 2. Она не спада у сигурне цифре, јер смо проценили да њена вредност може бити у опсегу од 0 до 4, тј. мера несигурности (0,2) показује да нисмо сигурни колика је вредност прве децимале. Цифре 9 и 7 не спадају у значајне цифре (*insignificant figures*), јер се за њих никаква процена не може урадити.

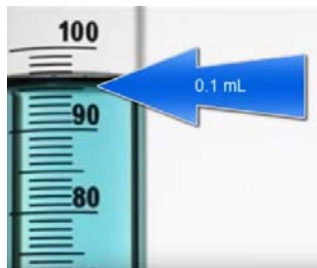


Слика 2. Цифре 3,5,8 и 6 су сигурне цифре (*significant figures*); цифра 2 није сигурна цифра (*insignificant figure*), али је значајна (*significant figure*); цифре 9 и 7 нису значајне цифре (*insignificant figures*).

Целобројне вредности које се завршавају нулом представљају проблем када није дата несигурност мерења. За нулу у бројној вредности 250; није сигурно да ли спада у значајну цифру или само попуњава место јединица. Међутим, када знамо да је несигурност мерења 0,1, јасно је да нула на месту јединица спада чак у сигурне цифре, а да бројна вредност 250 има још једну значајну цифру иза зареза. Закључујемо да је наведена бројна вредност неправилно записана, јер нису биле исписане све значајне цифре. Правилан запис је 250,0. Усвојено је правило да када не постоји децимални зарез, нуле на крајњој десној страни нису значајне цифре.

Пример 5.

Када меримо запремину течности помоћу мензуре од 100 ml чија најмања подела износи 1 ml могуће је тачно очитати 95 ml (толика је запремина наше течности) и може се извршити процена до на десети део ml (0,1 ml). Визуелно смо проценили да отприлике има још 0,5 ml течности, тј. укупна запремина је 95,5 ml. У сигурне цифре спадају очитаних 95 ml, док у несигурне цифре спада процењених пола ml. Све три цифре (две сигурне и једна несигурна) су значајне, јер нам дају увид у запремину течности.



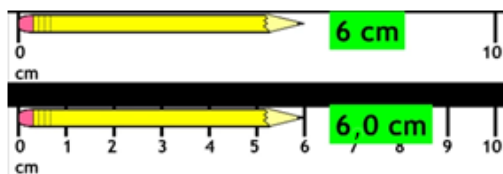
Слика 3. Мерење запремине течности помоћу мензуре од 100 ml са поделом од 1 ml.

Пример 6.

Колико је значајна цифра одмах с десне стране последње сигурне цифре може се видети на примеру мерења оловке помоћу лењира са две различите поделе.

У првом случају величина поделе је 10 cm , а оловка има вредност мању од 10 cm . Практично, дужину оловке нећемо моћи да опишемо ни једном сигурном цифром. На располагању нам је само једна несигурна цифра коју ћемо проценити.

Процена је да је оловка дуга 6 cm , али нисмо сигурни да ли је њена дужина тачно 6 cm , мало више или мало мање од 6 cm . Више или мање може бити $5,5\text{ cm}$; $6,5\text{ cm}$; $7,0\text{ cm}$... Након што је употребљен лењир са величином поделе од 1 cm , видимо да је врх оловке тачно на линији од 6 cm . У том случају би било исправно писати да је дужина оловке $6,0\text{ cm}$, како бисмо показали да сигурно знамо да је дужина оловке $6,0\text{ cm}$, а не око 6 cm .



Слика 4. Мерење дужине оловке помоћу лењира са величином поделе од 10 cm (горе) и величином поделе од 1 cm (доле).

Правила заокруживања и записивања вредности мерења

За записивање крајњег резултата користе се све значајне цифре: све сигурне и прва несигурна цифра. У **примеру 3** је показано да су значајне цифре дефинисане несигурношћу мерења (број иза знака $\pm$). Несигурност крајњег резултата се заокружује на једну значајну цифру. Прва несигурна цифра неке вредности је на децималном месту, на коме се налази несигурност мерења.

Пример 7.

Одредите које су сигурне цифре, које су значајне, али нису сигурне цифре, које цифре нису значајне и колико има укупно значајних цифара у вредностима из **табеле 1**.

Табела 1. Одређивање сигурних и значајних цифара.

Вредност	Сигурне цифре	Прва несигурна цифра	Број значајних цифара	Цифре које нису значајне
$0,00450 \pm 0,001$	нема	4	1	5 и 0
$560,176 \pm 0,02$	5, 6, 0 и 1	7	5	6
$3514,12 \pm 4$	3, 5, и 1	4	4	1 и 2

Вредност мерења се заокружује у складу са несигурношћу. Најниже децимално место измерене вредности мора одговарати децималном месту за несигурност мерења. Цифре измерене вредности на децималном месту нижем од децималне цифре за несигурност мерења нема смисла. Резултат који добијемо може бити са већим бројем децимала од несигурности, али се поставља питање каква је корист од цифара које немају никакво значење (вредност им је потпуно непоуздана). Несигурност, уствари, представља границу до које треба ићи када се записују цифре измерене или израчунате вредности. Изузетак од овог правила је када добијену вредност користимо за даље прорачуне. За прорачуне треба користити вредности записане тако да имају најмање једну цифру више од броја значајних цифара како би се избегле грешке услед заокруживања, а несигурност мерења треба заокружити на две цифре.

Заокруживање вредности мерења и њене несигурности се врши на основу вредности, пре свега, прве одбачене цифре према правилима заокруживања:

- Прва одбачена цифра већа од 5, задња задржана цифра се повећава за јединицу ($3,567 \sim 3,57$).
- Прва одбачена цифра мања од 5, задња задржана цифра се не мења ($1,234 \sim 1,2$).
- Прва одбачена цифра једнака 5, а све цифре са њене десне стране једнаке 0, задња задржана цифра се не мења ($12,35000 \sim 12,3$).
- Прва одбачена цифра једнака 5, док са њене десне стране има цифара различита од 0, задња парна задржана цифра се не мења ($34,123501 \sim 34,124$), док се непарна задржана цифра повећава за један ($34,12501 \sim 34,12$).

Пример 8.

Заокружите следеће вредности на одговарајући број значајних цифара.

$$345,87 \pm 30 \text{ m/s}$$

$$\text{Решење: } 350 \pm 30 \text{ m/s}$$

$$92,81 \pm 0,3 \text{ m/s}$$

$$\text{Решење: } 92,8 \pm 0,3 \text{ m/s}$$

$$92,81 \pm 3 \text{ m/s}$$

$$\text{Решење: } 93 \pm 3 \text{ m/s}$$

$$92,81 \pm 30 \text{ m/s}$$

$$\text{Решење: } 90 \pm 30 \text{ m/s}$$

$$X = 8,6711345 \pm 0,999864 \text{ m/s}$$

$$\text{Решење: } X = 9 \pm 1 \text{ m/s}$$

$$m = 44.278 \pm 2 \text{ m}$$

$$\text{Решење: Већ је коректно записано.}$$

$$g = 987,9004 \pm 52 \text{ m/s}^2$$

$$\text{Решење: } g = 990 \pm 50 \text{ m/s}^2$$

$$n = 3.000 \pm 20 \text{ m}$$

$$\text{Решење: Већ је коректно записано.}$$

$$56,9 \pm 0,6 \text{ l}$$

$$\text{Решење: Већ је коректно записано.}$$

$$7,18 \pm 0,0143 \text{ m}$$

$$\text{Решење: } 7,18 \pm 0,01 \text{ m}$$

Пример 9. Под претпоставком да су вредности правилно заокружене, одредите које су сигурне цифре, које су значајне, али нису сигурне цифре и колико има укупно значајних цифара у вредностима из **табеле 2**.

Табела 2. Одређивање сигурних и значајних цифара.

Вредност	Сигурне цифре	Прва несигурна цифра	Број значајних цифара
5,432 g	5, 4 и 3	2	4
40,319 g	4, 0, 3 и 1	9	5
146 cm ³	1 и 4	6	3
3,286 cm	3, 2 и 8	6	4
0,189 kg	1 и 8	9	3
429,3 g	4, 2 и 9	3	4
2873,0 cm ³	2, 8, 7 и 3	0	5
99,9 cm ³	9 и 9	9	3
0,000235 g	2 и 3	5	3
144 kg	1 и 4	4	3

Пример 10.

Концентрације раствора запремине 12,487 l је 4,01 M. Ако су одговарајуће неодређености за запремину и концентрацију 2,167 l и 0,25 M, израчунајте број молова растворене супстанце. У овом задатку неће бити одређивана неодређеност резултата рачуна.

Правилан запис за концентрацију и запремину биће:

$$c = 4,0 \pm 0,2 \text{ M}$$

$$V = 12 \pm 2 \text{ l}$$

Број молова можемо добити на три начина:

1. Вредности за концентрацију и запремину су заокружене само на значајне цифре

$$n = 4,0 \cdot 12 = 48,0 \text{ mol}$$

2. Вредности за концентрацију и запремину су заокружене на значајне и једну додатну цифру више:

$$n = 4,01 \cdot 12,5 = 50,125 \text{ mol} \approx 50,1 \text{ mol}$$

3. Вредности за концентрацију и запремину уопште нису заокруживане:

$$n = 4,01 \cdot 12,487 = 50,07287 \text{ mol} \approx 50,1 \text{ mol}$$

Ако заокружимо резултат на прву децималу, колико је најмања децимала значајне цифре за улазне податке рачуна, примећујемо да се за 2. и 3. начин резултати поклапају ($50,1 \text{ mol}$), док за први начин вредност резултата одступа ($48,0 \text{ mol}$) због грешке која се прави приликом заокруживања.

Када није назначена несигурност за одређену вредност, на основу записа те вредности може се претпоставити њена несигурност, број сигурних цифара и број значајних цифара. За вредност $60,15 \text{ ml}$ претпостављамо да је несигурност на другој децимали.

Записивање вредности помоћу научне нотације подразумева постављање прве значајне цифре испред зареза, остале значајне цифре су иза зареза, а димензије (ред) величине одређен је степеном броја 10. За записивање вредности у претходном тексту коришћена је **стандардна нотација**.

Пример 11.

Дате су вредности у стандардној нотацији. Запишите их помоћу научне нотације.

Стандардна нотација: $0,4050 \text{ g}$

Научна нотација: $4,050 \cdot 10^{-1} \text{ g}$.

Стандардна нотација: $0,00340$

Научна нотација: $0,00340 = 3,40 \cdot 10^{-3}$

Стандардна нотација: $0,0104$

Научна нотација: $0,0104 = 1,04 \cdot 10^{-2}$

Стандардна нотација: $710,$

Научна нотација: $710, = 7,10 \cdot 10^2$

Коментар: Захваљујући зарезу, јасно је да је нула са десне стране значајна цифра.

Вредности заједно са својим несигурностима се у научној нотацији пишу мало другачије него у стандардној нотацији. Научна нотација је погодна, јер омогућава једноставност записивања и отклања све сумње у вези вредности која је на тај начин записана.

Пример 12. Заокружите следеће вредности на одговарајући број значајних цифара.

$k = 7,7899 \times 10^{-7} \pm 3 \times 10^{-9} \text{ kg}$

Решење: $k = (7,79 \pm 0,03) \times 10^{-7} \text{ kg}$

$45,78934 \times 10^{-2} \pm 5 \times 10^{-3} \text{ cm}$

Решење: $(4,58 \pm 0,05) \times 10^{-1} \text{ cm}$

Пример 13. Просечна тежина слона је око $4,5 \text{ t}$. У извештају пише да је слон тежак 4.500 kg . Пошто не постоје други подаци, нисмо сигурни да ли је вага показала да је слон тежак 4.500 kg или је остелљивост ваге таква да она не може мерити масу реда величине 10^1 kg и нижу или је захваљујући несигурности мерења вредност масе морала бити заокружена на стотине килограма. Након добијања додатних информација, закључено је да је маса слона 4.498 kg измерена на ваги са прецизношћу од

$\pm 20 \text{ kg}$. На основу правила заокруживања маса је морала бити заокружена на 4.500 kg . Све дилеме би се избегле да је вредност била записана научном нотацијом: $4,5 \cdot 10^3 \text{ kg}$.

Пример 14. Одредите број значајних цифара за следеће вредности:

130, Решење: 3 значајне цифре

130 Решење: 2 значајне цифре. Нула би могла да буде и вредност која само служи да попуни место јединица.

130,0 Решење: 4 значајне цифре

1,000000 Решење: 7 значајних цифара

100000, Решење: 6 значајних цифара

100.000 Решење: 1 значајна цифра

$1,30 \times 10^2$ 3 значајне цифре, ово је начин да се за вредност 130 експлицитно наведе колико значајних цифара поседује. Када би писало $1,3 \times 10^2$ бројна вредност би имала 2 значајне цифре.

Заокруживање резултата рачуна

Вредности које добијемо нису последица само извршених мерења, већ и последица примењених рачунских операција. Овде ће бити приказано како проценити на колико значајних цифара треба заокружити крајњу вредност рачуна, када несигурности за појединачне вредности нису познате.

Пример 15. Сабирање и одузимање.

Резултат сабирања или одузимања више вредности заокружује се тако да последња значајна цифра буде на истој позицији као и последња значајна цифра код сабирка са најмањом прецизношћу (одузимање је сабирање супротних бројева).

$$135,6\underline{2}1 + 0,3\underline{3} + 21,2\underline{1}63 = 157,1\underline{6}73 \approx 157,1\underline{7}$$

Од свих сабирака, бројна вредност 0,33 има најлошију прецизност. Последња значајна цифра је на другој децимали.

Пример 16. Множење и дељење.

Производ или количник садржи онолико значајних цифара колико их има број са најмање значајних цифара који учествује у множењу или дељењу.

$$\frac{22,91 \cdot 0,152}{16,302} = 0,21361 \approx 0,214$$

Вредност 0,152 има најмањи број значајних цифара. Резултат се заокружује на 3 значајне цифре.

Пример 17. Логаритмовање.

Што се логаритамских вредности тиче, број сигурних цифара једнак је броју цифара са десне стране децималног зареза. Број значајних цифара у нумерусу, показује колико ће децималних места бити у вредности логаритма. Цифра са леве стране децималног зареза вредности логаритма не спада у значајне цифре, јер он означава степен броја 10. Логаритам од броја 12,8 (нумерус) мора имати 3 децимална места јер нумерус има три значајне цифре.

$$\log(12,8) = 1,107$$

Ово су уопштена правила и примењују се када нису дате несигурности мерења. Оно што је битно није број сигурних цифара сабирака или чиниоца, већ апсолутна несигурност приликом сабирања или одузимања и релативна несигурност приликом множења и дељења. Биће касније речи како се одређује несигурност.

Да би смо избегли грешке приликом заокруживања током рачуна (*“round-off” errors in calculations*) препоручљиво је задржати бар једну додатну цифру у односу на број значајних цифара. Најбоље је инвестирати у калкулатор који током рачунања може примити што већи број значајних цифара, а након рачуна заокруживати по правилима заокруживања.

Фундаменталне константе немају јединице мере и последица су математике: π , e ... Оне немају одређен број значајних цифара. Целобројним и рационалним константама (2, $\frac{1}{2}$) се додаје онолико нула колико је потребно, јер оне, по дефиницији, имају бесконачан број сигурних цифара.

Пример 18. Када množимо $2 \cdot 13,75$, морамо додати четири нуле броју 2 и онда применити правила за значајне цифре производа: $2,0000 \cdot 13,75 = 27,50$.

Резултат је заокружен на број значајних цифара који одговара чиниоцу 13,75. Целобројне и рационалне константе (у овом случају број 2) увек имају већи број значајних цифара од осталих бројева.

Ирационалним и фундаменталним константама треба додати одговарајући број цифара да имају већи број значајних цифара или већи број децималних места (зависно од рачунске операције) од осталих бројева. Пошто ирационалне и фундаменталне константе немају бесконачан број значајних цифара, може се десити да нека друга вредност има већи број значајних цифара или децималних места.

Пример 19.

$$r^2 \cdot \pi = 0,15^2 \text{ cm}^2 \cdot 3,14 = 0,07065 \text{ cm}^2 \approx 0,071 \text{ cm}^2$$

Пошто полупречник има 2 значајне сифре, за π вредност треба исписати бар једну значајну цифру више (3 значајне цифре). Резултат се заокружује на две значајне цифре.

Физичке константе (елементарно наелектрисање, планкова константа) се повинују истим правилима као и фундаменталне константе. Међутим, оне су последица експерименталног одређивања. Оне поседују велики, али коначан број значајних цифара. Могу постојати вредности које имају већи број значајних цифара од физичких константи. Тада је број значајних цифара у резултату рачуна одређен физичком константом.

Пример 20. 10,235 g NaCl је растворено у 1,8752 l воде. Несигурност одређивања масе натријум хлорида је 1 g, а одмерене запремине воде је 0,1 l. Одредите концентрацију воденог раствора натријум хлорида, ако су масе једног мола натријума $A(\text{Na}) = 22,989769280 \pm 0,000000020 \text{ g/mol}$ и једног мола хлора $A(\text{Cl}) = 35,453 \pm 0,002 \text{ g/mol}$.

У примеру нису примењена правила за одређивање броја значајних цифара приликом множења и дељења. Концентрација уз помоћ наведених података се рачуна по формули:

$$c = \frac{m}{(A(\text{Na}) + A(\text{Cl})) \cdot V}$$

Прво ћемо сабирати моларне атомске масе, а онда ће бити извршене операције дељења и множења.

1. начин

Користићемо прво вредности које су заокружене за једну цифру више од минималног броја потребних значајних цифара. За сабирање гледамо број који има најмањи број децималних места. $A(\text{Cl})$ има само три децимална места. Не можемо узети још једну цифру више од броја значајних цифара, јер немамо податак за цифру на четвртој децимали, али ћемо заокружити $A(\text{Na})$ на четири децимале. Код множења и дељења је битан најмањи број значајних цифара, а не број децималних места. Најмањи број значајних цифара од величина m , V и $M(\text{NaCl})$ има запремина (две значајне цифре). Зато ћемо пре рачунања све три вредности заокружити на три значајне цифре. Резултат ћемо, на крају заокружити на две значајне цифре.

$$A(\text{Na}) \approx 22,990 \text{ g/mol}$$

$$A(\text{Cl}) = 35,453 \text{ g/mol}$$

$$M(\text{NaCl}) = A(\text{Na}) + A(\text{Cl}) = 22,990 \text{ g/mol} + 35,453 \text{ g/mol} = 58,443 \text{ g/mol}$$

$$M(\text{NaCl}) \approx 58,4 \text{ g/mol}$$

$$m \approx 10,2 \text{ g}$$

$$V = 1,88 \text{ l}$$

$$c = \frac{m}{M(\text{NaCl}) \cdot V} = \frac{10,2 \text{ g}}{58,4 \text{ g/mol} \cdot 1,88 \text{ l}} = 0,092902943 \text{ M}$$

$$c \approx 0,093 \text{ M}$$

2. начин

Неће бити никаквог заокруживања. Биће коришћене све цифре.

$$c = \frac{m}{(A(\text{Na}) + A(\text{Cl})) \cdot V} = \frac{10,235 \text{ g}}{(22,989769280 \text{ g/mol} + 35,453 \text{ g/mol}) \cdot 1,8752 \text{ l}} = 0,093391954 \text{ M} \quad c \approx 0,093 \text{ M}$$

3. начин

Користићемо само значајне цифре.

$$c = \frac{m}{(A(\text{Na}) + A(\text{Cl})) \cdot V} = \frac{10,2 \text{ g}}{(22,98976928 \text{ g/mol} + 35,453 \text{ g/mol}) \cdot 1,9 \text{ l}} = 0,091857745 \text{ M}$$

$$c \approx 0,092 \text{ M}$$

Закључујемо да када се користе бројеви заокружени на једну цифру више од најмањег броја значајних цифара добија се најбољи резултат. Број цифара није неопходно повећавати, јер број са најмањим бројем децимала (сабирање и одузимање) и најмањим бројем значајних цифара (множење и дељење) одређује број децимала (значајних цифара) у крајњем резултату. Вредност са највећом несигурношћу диктира несигурност резултата прорачуна. Пропагација несигурности биће објашњена касније.